

بهینه‌سازی استوار سبد مالی با رویکرد CAPM

محسن قره‌خانی*^۱، سیدجعفر سجادی^۲، احرام صفری^۳

۱- استادیار دانشکده مهندسی گروه مهندسی صنایع دانشگاه قم

۲- استاد دانشکده مهندسی صنایع گروه مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت

۳- دانشجوی دکتری مهندسی صنایع دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه علم و صنعت

چکیده

در این تحقیق، رویکرد بهینه‌سازی استوار برای حل مسأله انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای پیشنهاد شده است. چنانکه می‌دانیم، بازده مربوط به هر یک از دارایی‌های موجود در سبد سهام غیر قطعی است، از این رو در نظرگیری یک مقدار قطعی در مدل‌ها به جای بازده هر یک از دارایی‌ها، باعث خواهد شد تا انتخاب‌های ما از اعتبار لازم برخوردار نباشد. برای غلبه بر این مشکل، در این مقاله از روش بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود. مدل‌های بهینه‌سازی استوار، بازدهی آینده دارایی‌ها را به صورت ضرایب غیر قطعی در مسأله بهینه‌سازی در نظر می‌گیرند و درجه ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاری را به درجه تحمل در مقابل کل خطای حاصل تخمین بازدهی‌ها تصویر می‌کنند. در این تحقیق، به منظور تخمین بازدهی انتظاری دارایی از مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای استفاده شده است. با توجه به مدل خطی استفاده شده برای تخمین بازدهی و رویکرد بهینه‌سازی استوار خطی استفاده شده، مدل پیشنهادی حاصله، خطی است که از نظر محاسباتی کارایی قابل قبولی دارد. خطی بودن مدل حاصله در زمانی که محدودیت‌های پیچیده، از قبیل: مالیات به ساختار مسأله اضافه شود، مزیت مهمی به حساب می‌آید.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی استوار، انتخاب سبد مالی، مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای،

سرمایه‌گذاری

مقدمه

جریمه مرتبط با تمایل به رسیک سرمایه گذار است و e بردار عناصر واحد است. محدودیت اول مسأله نشان می‌دهد که کل بودجه باید به دارایی‌های مختلف تخصیص یابد و امکان استفاده از بودجه اضافی منفی است. محدودیت سوم یا محدودیت علامت بیانگر عدم امکان استفاده از فروش استقراضی^۳ است.

مشکل اساسی مدل میانگین _ واریانس ماهیت تک دوره‌ای آن است. انتخاب نادرست طول افق زمانی سرمایه گذاری ممکن است به تصمیم‌های سرمایه گذاری غیر بهینه منجر گردد. مارکوویتز (۱۹۹۰) مسأله سرمایه گذاری بلند مدت را با استفاده از تابع مطلوبیت بر پایه مصرف در قالب برنامه ریزی پویا فرموله کرد. حل تحلیلی مسأله بهینه سازی سرمایه گذاری پیوسته برای انواع خاصی از توابع مطلوبیت و فرآیندهای قیمت دارایی در کارهای مرتون^۴ (۱۹۹۰، ۱۹۷۱)، ساموئلسون^۵ (۱۹۶۹) و کاکس^۶ (۱۹۸۹) بررسی شده است، اما به طور مشخص جواب‌های فرم بسته برای این مسائل تنها تحت فرضیات قوی روی رفتار سرمایه گذار و ساختار فرآیند قیمت دارایی میسر است و به سادگی نمی‌توان محدودیت‌های بازار، نظیر: هزینه معاملات و مالیات را در آنها گنجانند. پیشرفت‌های اخیر در حوزه فناوری اطلاعات باعث شده است که حل مسأله بهینه سازی سبد مالی در زمان گسسته آسانتر شود.

یکی از مشکلات اصلی در تصمیم گیری در مورد انتخاب سبد مالی، غیر قطعی بودن بازدهی‌های آینده است. این در حالی است که فرض اساسی در برنامه‌ریزی ریاضی این است که مقدار داده‌های

مسأله انتخاب سبد مالی^۱ یکی از مهمترین مسائل علم مالی است که همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. هر سال سرمایه گذاری بیشتری در صندوق‌های مشارکتی و شرکت‌های سرمایه گذاری انجام می‌شود و مدیران سبد مالی همواره به دنبال راه حل‌های کارتر و با ریسک کمتر در این رویه هستند. نخستین رویکرد سیستماتیک به مسأله انتخاب سبد مالی توسط هری مارکوویتز^۲ در سال ۱۹۵۲ مطرح شد. در مسأله انتخاب سبد مالی، سرمایه‌گذار با M دارایی مواجه است که هر یک در طول دوره سرمایه‌گذاری بازدهی تصادفی دارد. مسأله تخصیص بودجه معینی میان کلیه دارایی‌هاست؛ به طوری که در عین حصول بازدهی معین، کل ریسک سرمایه گذاری کمینه شود. این مسأله دارای دو هدف است: یکی حداکثر کردن بازدهی و دیگری کمینه کردن ریسک سرمایه گذاری. به سادگی می‌توان با قرار دادن ضریبی که حساسیت سرمایه گذار به ریسک را نشان می‌دهد، هر دو هدف را در یک تابع هدف با یکدیگر جمع کرد. رویکرد پیشنهادی مارکوویتز (۱۹۵۲) ایجاد تعادل میان ریسک و بازدهی سبد مالی را مورد خطاب قرار داده است. مدل پیشنهادی وی که به مدل میانگین _ واریانس معروف شده، به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \max R \cdot X - \lambda X \Sigma X \\ \text{s. t:} \\ X^T \cdot e = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن X برداری M عضوی است که وزن هر دارایی را در سبد مالی نشان می‌دهد. بردار R بازدهی انتظاری هر دارایی و ماتریس Σ مقادیر کوواریانس هر زوج دارایی را نشان می‌دهد. ضریب λ پارامتر

بهبودسازی استوار، مسأله تحلیل پوششی داده‌ها را حل و رویکرد بر تسیماس و بن تال را مقایسه کردند و تفاوت چشمگیری میان نتایج آنها گزارش نکردند. قره خانی^{۱۳} و همکاران (۲۰۱۰) رویکرد بهبودسازی چند هدفی استواری برای حل مسأله برنامه ریزی تولید پیشنهاد کردند. مسأله بهبودسازی استوار کاربردهای زیادی پیدا کرده است، ولی در این میان، کاربرد این رویکرد در مسأله تعیین سبد مالی از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا در این مسأله فرض عدم قطعیت در مورد پارامترهای مدل فرض بدیهی به نظر می‌رسد.

برتسیماس و همکاران (۲۰۰۸) یک رویکرد مدیریت سبد مالی چند دوره‌ای استواری پیشنهاد کردند که در آن براساس D نرم عمل کرده اند. ایراد این روش تعداد زیاد محدودیت‌هایی است که به خاطر کثرت پارامترهای غیر قطعی به مسأله تحمیل می‌شود. گلدفارب و همکاران (۲۰۰۳) یک رویکرد استوار برای حل مسأله انتخاب سبد سهام تک دوره‌ای با استفاده از مدل عاملی برای بازدهی سهام پیشنهاد کردند که مدل حاصله آنها از نوع برنامه ریزی مخروطی بود. برتسیماس (۲۰۰۴) رویکرد بهبودسازی استواری پیشنهاد کرد که خطی بودن مدل را حفظ می‌کند. در رویکرد پیشنهادی وی از نرم جدیدی تحت عنوان D نرم به جای نرم اقلیدسی استفاده شده است.

۱- مسأله بهبودسازی سبد مالی چند دوره‌ای

مسأله انتخاب سبد چند دوره را می‌توان به شرح زیر فرموله کرد (دانتزینگ، ۱۹۹۳): M دارایی خطرپذیر (R_1, R_2, \dots, R_M) و یک دارایی بدون ریسک R_0 و N دوره خرید و فروش $(T=0, \dots, N-1)$ وجود دارد. در دوره زمانی آخر (N) سرمایه گذار کل دارایی‌اش را جمع می‌زند. هدف این سرمایه گذار مدیریت بهبود

ورودی دقیقاً معلوم است و معادل مقادیر اسمی آنهاست. این فرض اثر عدم قطعیت در پارامترهای مسأله را بر کیفیت و شدنی بودن مسأله در نظر نمی‌گیرد. بنابراین در صورتیکه پارامترهای مسأله بهبودسازی مقادیری غیر از مقدار اسمی بگیرند، ممکن است برخی محدودیت‌ها رعایت نشود و جواب بهبودی‌ای که با استفاده از داده‌های اسمی به دست آمده، دیگر بهبودی و یا حتی شدنی هم نباشد. این مسأله باعث شد محققان روی روش‌های بهبودسازی کارکنند که نسبت به عدم قطعیت مصون باشند که در ادبیات به این روش‌ها بهبودسازی استوار^۷ گویند.

نخستین گام در طراحی روش‌های استوار توسط سویستر^۸ (۱۹۷۳) برداشته شد. وی مدلی پیشنهاد کرد که به ازای کلیه مقادیر که به مجموعه محدودی تعلق داشت، جواب بهبودی شدنی باقی بماند. مدل حاصل جواب‌هایی تولید می‌کرد که بسیار محافظه کارانه بود؛ به طوری که تا حد زیادی از جواب بهبودی مسأله اسمی فاصله می‌گرفت. در واقع، رویکرد پیشنهادی سویستر (۱۹۷۳) بسیار سخت گیرانه و برای بدترین حالت بود. بن تال و نمیروفسکی^۹ (۲۰۰۰ و ۱۹۹۹، ۱۹۹۸) و همچنین آلگوی^{۱۰} (۱۹۹۹، ۱۹۹۸) قدم‌های موثر تری در زمینه بهبودسازی استوار برداشتند. رویکرد پیشنهادی این نویسندگان کمتر از سویستر (۱۹۷۳) محافظه کارانه بود و شامل حل نظیر استوار^{۱۱} می‌شد. در مدل‌های پیشنهادی آنها عدم قطعیت به صورت بیضوی در نظر گرفته می‌شد. مشکل روش آنها این است که یک مسأله برنامه ریزی خطی را به فرم برنامه ریزی درجه دوم یا مخروطی در می‌آورد.

سجادی^{۱۲} و همکاران (۲۰۰۸) با استفاده از رویکرد

دوره $(t, t+1)$ ، برای دروه $t+1$ تصمیم گیری می کند. در اینجا فرض می شود که در هر مرحله سرمایه گذار تنها با استفاده از اطلاعات موجود تا آن دوره، گام اول سیاست بهینه تخصیص را بر می دارد. بنابراین، وی مسائل بهینه سازی مکرری را حل می کند و هر دفعه افق زمانی کوتاهتر می شود. در ادبیات کلاسیک سرمایه گذاری تابع مطلوبیت $U(W_N)$ معر فرض می شود تا عدم تمایل به ریسک را منعکس کند. بنابراین، در اینجا به صورت خطی و به فرم عبارت (۳) در نظر گرفته می شود:

$$U(\sum_{i=0}^m X_N^i) = \sum_{i=0}^m X_N^i \quad (3)$$

مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای: (CAPM)

مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه ای^{۱۴} توسط ویلام شارپ (۱۹۶۴) مطرح شد که وی به خاطر ارائه این مدل موفق به اخذ جایزه نوبل اقتصاد شد. مدل CAPM روش ساده ای است که به کمک آن می توان میزان بازدهی دارایی های مختلف را با استفاده از شاخص بازار برآورد کرد. مدل CAPM بازدهی دارایی های مختلف را به شرح زیر تخمین می زند:

$$R^i = R^0 + \beta^i (R^{Market} - R^0) \quad (4)$$

که در آن R^i بازدهی دارایی ریسک پذیر i ام، R^0 نرخ بازدهی بدون ریسک و R^{Market} بازدهی شاخص بازار است. β ضریب همبستگی میان بازدهی هر دارایی و شاخص بازار است که به آن ریسک سیستماتیک گویند و به شرح زیر محاسبه می شود:

مالی در این دوره های زمانی است؛ به طوری که مطلوبیت انتظاری نهایی اش $U(W_N)$ را بیشینه کند. میزان پول سرمایه گذار در ابتدای دوره t در دارایی i را با X_t^i نمایش می دهیم. اگر او از دارایی i ام در دوره t مقدار u_t^i بفروشد و یا مقدار v_t^i بخرد، باعث ایجاد هزینه معاملاتی به ترتیب $C_{sell} \cdot u_t^i$ و $C_{buy} \cdot v_t^i$ می شود. در آمد حاصل از فروش به حساب نقدی (دارایی صفر) اضافه و هزینه ها از آن کم می شود. در زمان $t+1$ میزان دارایی سرمایه گذار بر اساس بازدهی بوقوع پیوسته در دوره $(t, t+1)$ به روز می شود. در اینجا بازدهی غیر قطعی دارایی i ام در طول دوره زمانی $(t, t+1)$ را با \tilde{R}_t^i نشان می دهیم. برای ساده کردن مدل فرض می کنیم بازدهی تک دوره ای دارایی ریسک R_t^0 ، ثابت و قطعی باشد. مدل هزینه سازی سبد مالی چند دوره ای به شرح زیر فرموله می شود:

$$\max U(\sum_{i=0}^m X_N^i)$$

S.T:

$$\begin{aligned} X_t^i &= (1 + \tilde{R}_{t-1}^i)(X_{t-1}^i - u_{t-1}^i - v_{t-1}^i) \\ X_t^0 &= (1 + R_{t-1}^0)(X_{t-1}^0 + \sum_{i=1}^m (1 + C_{sell})u_{t-1}^i - \sum_{i=1}^m (1 + C_{buy})v_{t-1}^i) \end{aligned} \quad (2)$$

$$X_t^i \geq 0 \quad t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M$$

$$u_t^i \geq 0 \quad v_t^i \geq 0 \quad t = 1 \dots N, i = 1, \dots, M$$

اگر سرمایه گذار بتواند بازدهی غیر قطعی \tilde{R}_t^i را تخمین بزند، سیاست بهینه اش با حل مسأله بهینه سازی فوق به دست می آید. در واقعیت، بازدهی آینده در زمان صفر معلوم نیست. در عمل، سرمایه گذار پس از به دست آوردن اطلاعات اضافی در

$$R_t^i = \beta^i \bar{R}_t^{market} + (1 - \beta^i) R_t^0 \quad (6)$$

که در آن \bar{R}_t^{market} بازدهی غیر منطقی شاخص ازار در دوره t ام و R_t^i بازدهی دارایی بدون ریسک ر دوره زمانی t ام است. با جای گذاری برآورد بازدهی منتظاری بر پایه CAPM در مدل بهبود سازی سبد هام چند دوره‌ای به مدل ۷ خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=0}^M X_N^i \\ & \text{s.t.} \\ & X_t^i - (1 + \beta^i \bar{R}_t^{market} + (1 - \beta^i) R_t^0) \\ & (x_{t-1}^i - u_{t-1}^i + v_{t-1}^i) \leq 0 \\ & X_t^0 = (1 + R_{t-1}^0) \times \\ & \left(X_{t-1}^0 + \sum_{i=1}^m (1 + C_{sell}) u_{t-1}^i - \sum_{i=1}^m (1 + C_{buy}) v_{t-1}^i \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$X_t^i \geq 0 \quad t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M$$

$$u_t^i \geq 0 \quad v_t^i \geq 0 \quad t = 1 \dots N, i = 1, \dots, M$$

برتسیماس و همکاران (۲۰۰۸) نشان دادند که مسأله برنامه ریزی خطی به فرم کلی مدل ۸ را که در آن برخی از عناصر ماتریس A غیر قطعی اند، می توان با استفاده از نرم پیشنهادی وی به صورت مدل ۹ فرموله کرد.

$$\begin{aligned} & \max C^T X \\ & \text{S.T. } AX \leq b \\ & L \leq X \leq U \end{aligned} \quad (8)$$

$$\max \sum_j a_{ij} X_j + Z_i I_i + \sum_{j \in J_i} P_{ij} \leq b_i \quad \forall i$$

$$Z_i + P_{ij} \geq \hat{a}_{ij} \quad \forall i, j \in J_i$$

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R^i, R^{Market})}{\sigma_M^2} \quad (5)$$

که در آن σ_M^2 واریانس بازدهی بازار است. صرف نظر از میزان تنوع موجود در سبد مالی، حذف کلید ریسک‌ها امکان پذیر نیست. هر سرمایه گذار در هنگام انتخاب سبد مالی دو نوع ریسک تحمل می کند: اول نرخ ریسک سیستماتیک که مربوط به بازار است و چاره‌ای برای حذف آن نیست؛ مثل نوسان‌های نرخ بهره، تورم، رکورد اقتصادی و جنگ و دوم ریسک غیر سیستماتیک است که به یک دارایی خاص مربوط است و با افزایش تنوع سبد مالی می توان آن را حذف کرد. تئوری مدرن سبد مالی نشان می دهد که ریسک غیر سیستماتیک را می توان حذف کرد ولی ریسک سیستماتیک را حتی با تشکیل سبد مالی به بزرگی بازار نیز نمی توان حذف کرد. در این تحقیق، پیشنهاد می شود به منظور برآورد بازدهی غیر قطعی دارایی ها در هر دوره زمانی از مدل CAPM استفاده شود. بدین ترتیب تعداد پارامترهای غیر قطعی مسأله کمتر شده، کار مدل سازی استوار مسأله به سادگی صورت می گیرد.

۲- رویکرد استوار پیشنهادی برای حل مسأله بهبود سازی سبد مالی چند دوره‌ای

در فرآیند مدل سازی مسأله انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای، پارامتر بازدهی در هر دوره برای دارایی های ریسک پذیر، غیر قطعی در نظر گرفته می شود. در این تحقیق پیشنهاد می شود به منظور مدل سازی بازده های انتظاری از مدل CAPM استفاده شود. با توجه به فرم کلی مدل CAPM می توان بازدهی غیر قطعی دارایی ریسک پذیر i ام در دوره زمانی t ام را به شرح عبارت ۶ مدل کرد.

$$\begin{aligned}
 Z_t^i + P_t^i &\geq \Delta R_t^M y^t & -y_j &\leq x_j \leq y_j \quad \forall j \\
 -y^t &\leq X_{t-1}^i - u_{t-1}^i + V_{t-1}^i \leq y^t & l_j &\leq X_j \leq u_j \quad \forall j \\
 P_t^i \geq 0 \quad Z_t^i \geq 0 \quad t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M & \quad (10) & P_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \in J_i & (9) \\
 y^t \geq 0 \quad t = 1, \dots, N & & y_j &\geq 0 \quad \forall j \\
 X_t^i \geq 0 \quad t = 1, \dots, N, i = 0, \dots, M & & Z_i &\geq 0 \quad \forall i \\
 u_t^i \geq 0 \quad v_t^i \geq 0 \quad t = 1 \dots N, i = 1, \dots, M & & & &
 \end{aligned}$$

چنانکه مشاهده می شود، در این فرموله بندی به جای کلیه بازدهی های غیر قطعی \hat{R}_{ij}^i فقط بازدهی شاخص بازار غیر قطعی است که مقدار اسمی آن در دوره استفاده می شود.

۳- حل مثال عددی

به منظور بررسی کارایی مدل پیشنهادی یک مثال عدد با استفاده از اعداد شبیه سازی شده حل می شود. در این مثال، $N=4, M=3$ در نظر گرفته می شود. به منظور به دست آوردن جواب بهینه، مدل پیشنهادی در نرم افزار Lingo کد نویسی و حل شده است. این مسأله را به ازای مقادیر مختلف Γ حل کرده ایم. به پارامتر Γ بودجه استواری نیز گفته می شود. نتایج محاسباتی به شرح جدول ۱ خلاصه شده است. همان طور که در شکل ۱ مشاهده می شود، با افزایش مقدار Γ مقدار کل تابع هدف؛ یعنی میزان دارایی کل سرمایه گذار در دوره آخر، کم می شود. با توجه به وجود تنها یک پارامتر قطعی در هر محدودیت مدل پیشنهادی، می توان نتیجه گرفت که در صورت افزایش Γ تا مقدار یک، قطعاً کلیه محدودیت های مسأله رعایت می شود، ولی در صورت افزایش $\Gamma < 1$ نمی توان بطور قطع از ارضای محدودیت ها اطمینان حاصل کرد. تنها می توان احتمال رد شدن محدودیت ها را بررسی کرد.

در این فرموله بندی پیشنهادی J_i نشان دهنده تعداد ضرایب غیر قطعی در سطر i ام ماتریس A است. فرض می شود ضریب غیر قطعی \hat{a}_{ij} عدد تصادفی یکنواخت در بازه $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ باشد. در این صورت، اگر Γ_i تا از ضرایب غیر قطعی در سطر i ام تغییر کند، قطعاً جواب هنوز شدنی است و اگر بیش از Γ_i تا از ضریب تغییر کند، احتمال رد شدن محدودیت را به دست می آوریم.

پارامتر Γ_i لزوماً صحیح نیست و می تواند در بازه $[0, |J_i|]$ مقدار بگیرد. توجیه این روش این است که در طبیعت کمتر پیش می آید که همه ضرایب غیر قطعی بدترین مقدار به خود را اختیار کنند و معمولاً برخی از آنها تغییر می کند. با استفاده از رویکرد پیشنهادی برتسیماس مسأله بهینه سازی سبد مالی چند دوره ای با در نظر گرفتن CAPM به عنوان مدل برآورد کننده بازدهی انتظاری به شرح مدل ۱۰ فرموله می شود.

$$\begin{aligned}
 X_t^i - (1 + \beta_i R_t^{\text{market}} + (1 + \beta_i) R_t^0) \times \\
 (X_{t-1}^i - u_{t-1}^i + V_{t-1}^i) + Z_t^i + \Gamma_t^i + P_t^i \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_i = (1 + R_{t-1}^0)(X_{t-1}^0 + \\
 \sum_{i=1}^m (1 + C_{\text{sell}}) u_{t-1}^i - \sum_{i=1}^m (1 + C_{\text{buy}}) v_{t-1}^i)
 \end{aligned}$$

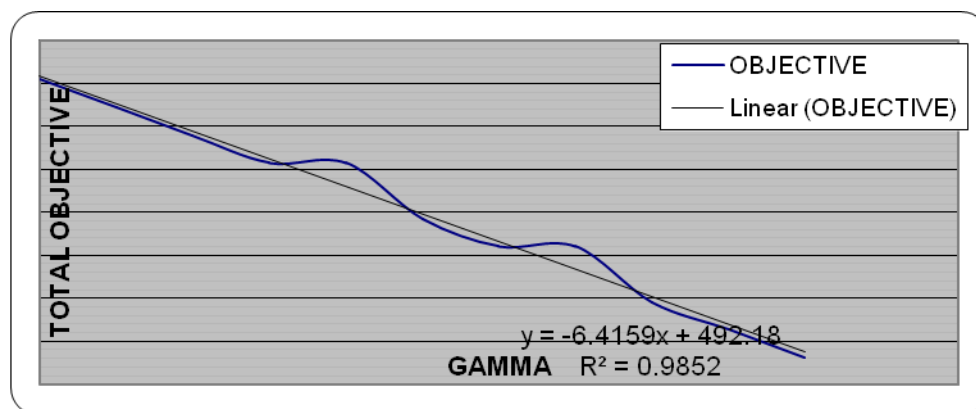
۴- نتیجه گیری

در این تحقیق، مسأله بهینه سازی انتخاب سبد مالی چند دوره‌ای با استفاده از رویکرد بهینه سازی استوار حل شده است. به منظور تخمین بازدهی غیر قطعی آینده دارایی‌ها از مدل قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای استفاده شده است. این مدل به ما کمک می‌کند تا تعداد پارامترهای غیر قطعی در محدودیت‌های مسأله بهینه سازی را کمتر کنیم که از نظر حل مسأله نظیر استوار نقش بسزایی دارد. همچنین، ماهیت مسأله

سرمایه گذاری با عدم قطعیت نسبت به آینده همراه است که می‌توان برای پاسخ به چنین عدم قطعیتی از رویکردهای شبیه سازی استوار استفاده کرد. در این تحقیق از رویکرد بهینه سازی استوار برتسیماس (۲۰۰۴) استفاده شده است که خطی بودن مدل را حفظ می‌کند. مثال عددی حل شده نشان می‌دهد که مدل سازی صورت گرفته به خوبی می‌تواند برای مقابله با عدم قطعیت در مسأله تعیین سبد مالی به کار رود.

جدول ۱- نتایج محاسباتی به ازای مقادیر مختلف بودجه استواری

گاما	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
تابع هدف	492.1	491.4	490.8	490.2	490.2	488.9	488.2	488.2	486.9	486.3	485.6



شکل ۱- نمودار تابع هدف دوره‌هایی بر اساس مقادیر مختلف بودجه استواری

Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (1999). "Robust solutions to uncertain programs", *Oper, Res, Lett*, 25, 1-13.

Bertsimas, D., Pachamanova, D. (2008). "Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs", *Computers & Operations Research*, 35: 3 - 17.

Bertsimas, D., Sim, M. (2004). "The Price of

منابع:

Ben-Tal, A, Nemirovski, A. (1998). "Robust convex optimization", *Math. Oper, Res*, 23: 769-805.

Ben-Tal, A. , Nemirovski, A. (2000). "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data", *Math. Programming*, 88: 411-424.

- efficient diversification of investments*, 2nd ed., Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Merton, R. (1990). *Continuous-time finance*, Cambridge, MA: Blackwell Publishers.
- Merton, R. (1971). "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model", *Journal of Economic Theory*, 3:373-413.
- Sadjadi, S.J., Omrani, H. (2008). "Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies", *Energy policy*, 36: 4247-4254.
- Samuelson, P.A. (1969). "Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming", *Review of Economics and Statistics*, 51: 239-46.
- Sharpe, W.F. (1964). "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, 19: 425-42.
- Soyster, A.L. (1973). "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming", *Oper. Res*, 21: 1154-1157.
- Robustness", *Operations Research*, 52: 1, 35-53.
- Cox, J., Huang, C.F. (1989). "Optimal consumption and portfolio choices when asset prices follow a diffusion process", *Journal of Economic Theory*, 49: 33-83.
- Dantzig, G.B., Infanger, G. (1993). "Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization", *Annals of Operations Research*, 45: 59-76.
- El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H. (1998). "Robust solutions to uncertain semi definite programs", *SIAM J. Optima*, 9: 33-52.
- El-Ghaoui, L., Lebret, H. (1997). "Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 18: 1035-1064.
- Gharakhani, M., Taghipar, T., Jalali, K.F. (2010). "A robust multi-objective production planning", *International Journal of Industrial Engineering computations*, 1: 73-78.
- Goldfarb, D., Iyengar, G. (2003). "robust portfolio selection problems", *Mathematics Of Operations Research*, 28: 1: 1-38.
- Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio selection", *Journal of Finance*, 7: 77-91.
- Markowitz, H.M. (1991). *Portfolio selection:*

پی نوشت:

-
- ¹ Portfolio selection
² Markowitz
³ Short selling
⁴ Merton
⁵ Samuelson
⁶ Cox
⁷ Robust optimization
⁸ Soyster
⁹ Ben-Tal & Nemirovski
¹⁰ El-Ghaoui
¹¹ Robust counterpart
¹² Sadjadi
¹³ Gharakhani
¹⁴ Capital Asset Pricing model