مدیریت تولید و عملیات، دوره سوم، پیاپی(٤)، شماره (۱)، بهار و تابستان ۱۳۹۱
وصول: ۹۰/۳/۱۰ پذیرش: ۹۱/۱/۱۵
صص: ١٦- ۱

تعیین اندازه دسته تولید با تقاضای احتمالی و در نظرگیری سطح خدمت

هاجر شیرنشان[1]*، مهدی بیجاری[2]، قاسم مصلحی[3]
۱ - دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان
۲ - دانشیار مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان
۳ - استاد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

تعیین اندازه دسته تولید در حالت احتمالی به علت کاربرد عملی آن، موضوع قابل توجهی در برنامه‌ریزی تولید محسوب می‌شود، همچنین، مفهوم سطح خدمت برای مدیران نسبت به هزینه کمبود کاربردی‌تر است. از این لحاظ در این تحقیق به حل مدل تعیین اندازه دسته تولید در حالت چند دوره‌ای و چند محصولی و وجود محدودیت ظرفیت با تقاضای احتمالی و محدودیت سطح خدمت در حالت پس‌افت پرداخته شده است. ابتدا مدل در حالت تک محصولی با در نظر گرفتن سطح خدمت و بدون محدودیت ظرفیت ارائه شده و جواب بهینه با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا به دست آمده است. سپس مدل به حالت چند محصولی با محدودیت ظرفیت تعمیم داده شده است. با توجه به اینکه مدل تعیین اندازه دسته تولید در حالت چند دوره‌ای و چند محصولی با محدودیت ظرفیت و تقاضای احتمالی NP-Hard است و در نتیجه حل این مدل در ابعاد بزرگ با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی دقیق امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل از روش فراابتکاری سرد کردن تدریجی برای حل این مدل به کار رفته است. سپس برای بررسی کارایی روش حل، از معیار حد پایین استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: تعیین اندازه دسته تولید چند دوره‌ای چند محصولی، تقاضای احتمالی، سطح خدمت، برنامه‌ریزی پویا، روش فراابتکاری سرد کردن تدریجی

---

* نویسنده مسؤول: hse1389@yahoo.com,

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی تولید، فعالیتی است که شامل بهترین استفاده از منابع تولید برای ارضای اهداف تولید در طول یک دوره مشخص به نام افق برنامه‌ریزی است. یکی از پرکاربردترین زمینه‌ها در برنامه‌ریزی تولید مربوط به تعیین مقدار و دوره تولید محصولات است که به‌عنوان تعیین اندازه دسته تولید شناخته می‌شود. یکی از خروجی‌های ضروری و پر استفاده یک سیستم برنامه‌ریزی تولید، برنامه اصلی تولید (MPS[1]) است. این برنامه مشخص می‌کند که کدام محصولات، به چه میزان و در کدام دوره باید تولید شوند. در تعیین این برنامه، مدل‌های تعیین اندازه دسته تولید کاربرد دارند. به علت استفاده از برنامه‌ریزی تولید با تقاضای احتمالی در سیستم‌های تولید مطابق سفارش مشتری و سیستم‌های مونتاژ مطابق سفارش، اهمیت این نوع برنامه ریزی افزایش یافته است. در حالتی که مقدار تقاضا متغیر تصادفی باشد، مسأله بسیار پیچیده می‌شود و در این زمینه کارهای اندکی صورت گرفته است. کارهای انجام شده عمدتاً روی مسائل احتمالی بدون محدودیت ظرفیت بوده است.اغلب نتایج عملی در دسترس محدود است (گوپتا، ۱۹۷۷). با توجه به این که در سیستم‌های تولیدی محاسبه هزینه کمبود معمولا کار راحتی نیست، بنابراین در بسیاری از موارد می‌توان از مفهوم سطح خدمت استفاده کرد که از طرف مدیریت قابل تعیین است. در این مقاله با حذف هزینه کمبود و وارد کردن مفهوم سطح خدمت در مدل ساکس، مدل تعیین اندازه تولید تک محصولی و چند محصولی با تقاضای احتمالی با در نظر گرفتن مفهوم سطح خدمت ارائه و حل شده است (ساکس، ۱۹۹۷).

ساکس یک روش بهینه یابی مشابه روش واگنر-ویتین برای تعیین اندازه دسته تولید تک محصولی با تقاضای تصادفی و هزینه‌های متغیر با در نظر گرفتن هزینه کمبود ارائه کرده است (ساکس، ۱۹۹۷). وی با اثبات دو قضیه حجم محاسبات برنامه‌ریزی پویا را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می دهد. در این مدل هزینه‌های تولید، کمبود و آماده‌سازی وجود دارد. مقادیر بهینه اندازه دسته تولید در یک افق T دوره‌ای تعیین می شود. فرضیات مدل او عبارتند از: تابع توزیع احتمالی هر دوره مشخص است، تابع توزیع احتمال تقاضای تجمعی از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا هر دوره مشخص است، تصمیم‌گیری در ابتدای افق برنامه‌ریزی صورت می‌گیرد و تقاضای برآورده نشده پس افت می‌شود. هزینه‌های تولید (خرید)، نگهداری و کمبود هر واحد محصول و هزینه آماده‌سازی(هزینه سفارش دهی) می‌تواند در دوره‌های مختلف متفاوت باشد.

معرفی پارامترها و متغیرها:

K_t: هزینه سفارش‌دهی در دوره t

c_t: هزینه خرید هر واحد در دوره t

h_t: هزینه نگهداری در دوره t

π_t: هزینه عقب افتادگی در دوره t

T: طول افق تصمیم گیری

M: یک مقدار بزرگ

$d_t(\omega)$: تقاضا در دوره t

$D_t(\omega)$: مقدار تجمعی تقاضا تا دوره t

$f_t(y)$: تابع چگالی احتمال D_t

$F_t(y)$: تابع توزیع تجمعی D_t

ω: تقاضای تصادفی

I_0: موجودی اولیه

x_t: مقدار سفارش در دوره t

z_t: یک، اگر آماده سازی در دوره t انجام شود و صفر، در غیر این صورت.

X_t: مقدار تجمعی سفارش تا دوره t

$I_t(\omega)$: مقدار موجودی خالص در پایان دوره t

مدل برنامه‌ریزی ریاضی مسأله به صورت زیر نوشته می‌شود(ساکس،۱۹۹۷):(مدل P1)

$$\min \sum_{t=1}^{T} [K_t z_t + c_t x_t + h_t E[I_t^+] + \pi_t E[I_t^-]]$$

$$s.t.$$

$$I_t(\omega) = I_{t-1}(\omega) + x_t - d_t(\omega), \forall t,$$
$$x_t \le M z_t, \forall t,$$
$$x_t \ge 0, \forall t,$$
$$z_t \in \{0,1\}, \forall t,$$

که: $E[I_t^+] = E[max\{I_t(\omega), 0\}],$
و $E[I_t^-] = E[max\{-I_t(\omega), 0\}]$

با جایگذاری مقدار تجمعی سفارش، X_t، در مدل P_1 ، متغیرهای موجودی از مدل حذف شده است.

با تعریف $C_{T+1} = 0$ ، تابع هدف به صورت زیر نوشته می‌شود:(مدل P2)

$$\min \sum_{t=1}^{T} [K_t z_t + L_t(X_t) + (c_t - c_{t+1}) X_t] \qquad (۱)$$

از رابطه (۱)، مشاهده می‌شود که تابع هدف روی متغیر X_t تفکیک‌پذیر است. روش حل در واقع تفکیک تابع هدف به مجموعه‌ای مسائل روزنامه فروش چند دوره‌ای با محدودیت است.

محدودیت‌های مسأله باید در تعیین جواب بهینه P_2 در نظر گرفته شوند. در نتیجه، روش برنامه‌ریزی پویا برای یافتن حداقل هزینه به‌طوری که محدودیت‌ها را راضی کند، استفاده می‌شود. وی قضیه‌ای اثبات کرده است که با استفاده از آن تعدادی از محاسبات دوره‌های بعدی با توجه به جواب دوره فعلی حذف می‌شود. به این ترتیب، سرعت محاسبات افزایش می‌یابد. تاریم و کینگزمن به مساله تعیین اندازه دسته تولید در حالت تک محصولی چند دوره‌ای با محدودیت سطح خدمت پرداخته و جواب بهینه را با استفاده از استراتژی عدم قطعیت ایستا-پویا به‌دست آورده‌اند (تاریم و کینگزمن، ۲۰۰٤). ساکس و موکستادت یک مدل و یک روش حل تقریبی برای مسأله برنامه‌ریزی تولید با افق محدود و محدودیت ظرفیت با تقاضای تصادفی برای چند

محصول و با چند منبع تولید ارائه کرده‌اند (ساکس و موکستادت،١٩٩٦). مدل مذکور شامل هزینه‌های خطی نگهداری و کمبود در تابع هدف است. به جای محدودیت سطح خدمت، هزینه کمبود وارد مدل شده و هزینه آماده‌سازی درنظر گرفته نشده است. برای حل مدل روشی ارائه داده‌اند که مسأله را تجزیه کرده و با استفاده از ضرایب لاگرانژ جواب نزدیک به بهینه مدل را می‌یابند.

ساکس و همکاران به بررسی مقالات مربوط به تعیین اندازه دسته تولید در حالت چند محصولی با تقاضای احتمالی تا سال ١٩٩٩ پرداخته‌اند (سوکس و همکاران، ١٩٩٩). در این مسأله به تعیین اندازه دسته تصادفی با فرض استفاده از یک تجهیز، ظرفیت محدود و تفاوت قابل توجهی در هزینه و زمان آماده‌سازی برای تغییر محصولات و مستقل از توالی پرداخته می‌شود. بیتران و یاناسی یک روش ابتکاری برای برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با محدودیت ظرفیت تولید و محدودیت سطح خدمت ارائه کرده‌اند (بیتران و یاناسی، ١٩٨٤). آنها یک تقریب قطعی (غیرتصادفی) از مدل احتمالی را توسعه داده‌اند که برای مثال‌های با سطح خدمت زیاد خطای نسبتاً کوچکی دارد. خانگ و فوجیورا در روش خود به میزان فراوانی از کار بیتران و یاناسی استفاده کرده‌اند (خانگ و فوجیورا، ١٩٩٣). آنها مسأله را به صورت یک مسأله جریان شبکه فرموله کرده‌اند. در این تحقیق، یک تقریب قطعی از مسأله احتمالی به‌دست آورده‌اند که می‌تواند با استفاده از روش‌های مناسب جریان شبکه حل شود. لیچمن و گاسکن از یک روش پویا استفاده کرده‌اند که آن را روش ابتکاری طول‌های سیکل دینامیک(DCL[٢]) نامیده‌اند(لیچمن و گاسکن، ١٩٨٨و١٩٩١). ساکس و موکستادت چهارچوبی را برای ترتیب یابی پویا پیشنهاد کرده‌اند (ساکس و موکستادت، ١٩٩٧). آنها مسأله تعیین اندازه دسته را با زمان و هزینه‌های آماده‌سازی به صورت برنامه‌ریزی احتمالی با دوره تصمیم‌گیری مشخص T فرموله کرده‌اند. مدل آنها می‌تواند به عنوان نسخه احتمالی مسأله تعیین اندازه دسته تولید با محدودیت ظرفیت قطعی(CLSP) دسته‌بندی شود. بیجاری و حجی مدلی را ارائه کرده‌اند که تا حدود زیادی با مدل بیتران و یاناسی مشابهت دارد (بیجاری و حجی، ١٣٨٤). مولا به بررسی برخی از متون موجود در برنامه‌ریزی تولید در حالت عدم قطعیت پرداخته است (مولا، ٢٠٠٦).تمپلمیر به مساله تعیین اندازه دسته پویا با تقاضای احتمالی در حالت پس‌افت پرداخته است (تمپلمیر، ٢٠٠٧). او مدلی را فرموله کرده که درآن هزینه‌های نگهداری و آماده‌سازی حداقل می شود. او محدودیت منفی نشدن موجودی در پایان دوره را در مدل خود در نظر گرفته است. هانگ و همکارش یک فرمول‌بندی احتمالی برای مسائل تعیین اندازه دسته تولید در حالتی که هزینه، تقاضا و فاصله زمانی تحویل احتمالی باشد، ارائه کرده‌اند (هانگ و همکارش، ٢٠٠٨).آنها خصوصیات جواب بهینه را مشخص و یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای حل ارائه کرده‌اند.

گان و همکارش مساله تعیین اندازه دسته احتمالی را با محدودیت موجودی و ظرفیت سفارش دهی بررسی کرده‌اند(گان و همکارش، ٢٠١٠).آنها دو مدل در حالت احتمالی توسعه داده‌اند: ١. با محدودیت موجودی؛٢. با محدودیت موجودی و محدودیت ظرفیت سفارش دهی. سپس روش حل توسط

الگوریتم برنامه‌ریزی پویا ارائه شده است. زانگ به مساله تعیین اندازه دسته در حالت پایدار[3] دو مرحله‌ای بدون محدودیت ظرفیت با فرض عدم قطعیت در تقاضا و تابع هدف مینی ماکس پرداخته و فرمول‌بندی عدد صحیح مختلطی را برای مساله پیشنهاد کرده است (زانگ، ۲۰۱۱). گرچه این مساله NP-Hard است، اما نشان داده شده است که در زمان چند جمله‌ای قابل حل است. در این مقاله به مدل‌سازی حالت تک محصولی چند دوره‌ای با محدودیت سطح خدمت پرداخته شده که تا کنون در هیچ یک از کارهای گذشته ارائه نشده است. سپس با روش برنامه‌ریزی پویا جواب بهینه به‌دست آمده است. در ادامه، به مدل‌سازی مساله در حالت چند محصولی با محدودیت ظرفیت پرداخته شده که از حالت تک محصولی به‌دست آمده و سپس روش ابتکاری برای حل آن ارائه شده است.

۲- تعیین اندازه دسته تولید با تقاضای احتمالی و محدودیت سطح خدمت

در این قسمت مدل تعیین اندازه دسته تک محصولی با تقاضای احتمالی بدون محدودیت ظرفیت با محدودیت سطح خدمت در حالت پس‌افت و مدل در حالت چند محصولی با محدودیت ظرفیت معرفی و روش ابتکاری حل مدل ارائه می شود.

۲-۱- تعیین اندازه دسته تک محصولی و چند دوره‌ای با تقاضای احتمالی بدون محدودیت ظرفیت و سطح خدمت

در سیستم‌های تولیدی محاسبه هزینه کمبود معمولا کار راحتی نیست و بنابراین، در بسیاری از موارد می‌توان از مفهوم سطح خدمت استفاده کرد که از طرف مدیریت قابل تعیین است. با حذف هزینه کمبود و وارد کردن مفهوم سطح خدمت در مدل ساکس(ساکس، ۱۹۹۷)، مدل تعیین اندازه تولید تک محصولی در حالت احتمالی با در نظر گرفتن سطح خدمت به صورت مدل M1 است.

فرضیات مدلM1 عبارتند از: از سطح خدمت به جای هزینه کمبود استفاده می شود، توزیع تقاضا نرمال است، سایر فرضیات مانند مدل P1 است. هزینه‌های تولید (خرید)، نگهداری هر واحد محصول و هزینه آماده‌سازی (هزینه سفارش دهی) می‌توانند در دوره‌های مختلف متفاوت باشد

.معرفی پارامترها و متغیرها:

$\propto$: سطح خدمت و سایر پارامترها مانند مدل P1 است.

مدل M1

$$\min \sum_{t=1}^{T} [K_t z_t + c_t x_t + h_t E[I_t^+]]$$

$$s.t. \quad I_t = I_{t-1} - d_t, \forall t,$$

$$x_t \le M z_t, \quad \forall t,$$

$$x_t \ge 0, \quad \forall t,$$

$$Pr\{I_t \ge 0\} \ge \propto \quad (۲)$$

$$z_t \in \{0,1\}, \quad \forall t,$$

محدودیت (۲) بیان می‌کند که احتمال بزرگتر یا مساوی صفر بودن سطح موجودی پایان دوره(I_t)، بزرگتر یا مساوی مقدار سطح خدمت ($\propto$) باشد.

سایر محدودیت ها مانند مدل ساکس(ساکس، ۱۹۹۷) می‌باشد که در مقدمه به آن اشاره شد. هم چنین با توجه به حذف هزینه کمبود ، عبارت $\pi_t E[I_t^-]$ از تابع هدف حذف شده است.

۲-۱-۱- روش حل

ساکس مسأله را به یک سری تابع هدف و محدودیت‌های مسأله روزنامه فروش تجزیه کرده و سپس از روش برنامه‌ریزی پویا برای یافتن حداقل هزینه و به‌دست آوردن جواب بهینه استفاده نموده است (ساکس،۱۹۹۷). برای حل مسأله در حالتی که سطح خدمت مطرح است نیز از رهیافت ارائه شده در (ساکس،۱۹۹۷) استفاده شده؛ با این تفاوت که برای محاسبه مقدار تولید در هر دوره، نتایج مدل روزنامه فروش با در نظر گرفتن موجودی ابتدای دوره بیجاری و حجی به کار گرفته شده است (بیجاری و حجی، ۱۳۸۴).

لم ۱: اگر $\propto$ مقدار سطح خدمت باشد، رابطه ارائه شده در (بیجاری و حجی،۱۳۸۴)

$$(\int_{I_n}^{I_m} F(Q^* + i)g(i)di = \frac{\pi - C}{\pi + H})$$

را می توان به این صورت نوشت::

$$\int_{I_n}^{I_m} F(Q^* + i)g(i)di = \propto$$

R: سطح موجودی ابتدای دوره A: عدد ثابت

اثبات:

فرض کنید $F(R) = A$ باشد، بنابراین

$P(D \le R) = A$ و در نتیجه

$P(0 \le R - D) = A$.از طرفی

، $I = R - D$ بوده و $Pr\{I \ge 0\} = \propto$

در نتیجه $A = \propto$

ازطرفی $F(R) = \frac{\pi - C}{\pi + H}$ و بنابراین:

$$\int_{I_n}^{I_m} F(Q^* + i)g(i)di = \propto$$

با استفاده از نتایج به‌دست آمده از مدل احتمالی یک دوره‌ای با موجودی تصادفی ابتدای دوره، با مشخص بودن سطح خدمت، مقدار سفارش در هر دوره قابل محاسبه است. سپس با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا می توان مقدار بهینه سفارش در هر دوره را برای مدل M1 به‌دست آورد.

الگوریتم برنامه‌ریزی پویای ارائه شده، تعمیم الگوریتم ارائه شده توسط ساکس با در نظر گرفتن فرضیات مدل M1 است (ساکس، ۱۹۹۷). قبل از پرداختن به قدم‌های الگوریتم، لازم است نمادهای زیر معرفی شوند: پرداختن به قدم‌های الگوریتم، لازم است نمادهای زیر معرفی شوند:

$g_{st}(X_{st})$: هزینه مورد انتظار در طول دوره‌های $s, s+1, \dots, t$ به‌طوری که آماده‌سازی در دوره s اتفاق بیفتد و آماده‌سازی بعدی در دوره $t+1$ باشد.

f_{st}: هزینه‌های مورد انتظار بهینه در دوره t به طوری که آخرین سفارش تا دوره t ، در دوره s اتفاق افتاده است.

X_{st}: مقدار تولید در دوره‌های s تا t به‌طوری که آماده‌سازی در دوره s اتفاق بیفتد و آماده‌سازی بعدی در دوره $t+1$ باشد.

X^*_{s-1}: مقدار تجمعی بهینه سفارش تا دوره s

I_t : متغیر تصادفی موجودی در پایان دوره t

$\sigma(I_t)$: واریانس متغیر تصادفی I_t

$E(I_t)$:امید ریاضی I_t

$E(d_t)$: امید ریاضی تقاضا در دوره t

قدم‌های الگوریتم برنامه‌ریزی پویا

شروع

برای $t=1$ تا T

برای $s=1$ تا t

مقدار X_{st} و $g_{st}(X_{st})$ را محاسبه کن.

اگر $s=1$ آنگاه

$MIN=0$

در غیر این صورت

$MIN=min\{f_{k,s-1}:X_{k,s-1}\le X_{st}\}$

$f_{st}=g_{st}(X_{st})+MIN$

$$E(I_t)=X_{st}(f_{st})+X^*_{s-1}-\sum_{k=1}^{t}E(d_k)$$

$$\sigma(I_t)=\sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^{t}\sigma^2_{d_k}}$$

$$\int_{-3\sigma(I_t)}^{+3\sigma(I_t)}F(X_{st}+I_t)g(I_t)dI_t=\propto$$

محاسبات برگشتی

$t=T$

آنگاه $t>1$ تا وقتی که

$s=argmin\{f_{jt}\}_{j\le t}$

$z_s=1$

برای $j=s+1$ تا t، $z_j=0$

برای $j=s$ تا t، $X_j=X_{st}$

$t=s-1$

پایان

در این الگوریتم لازم است که توزیع موجودی در انتهای هر دوره (I_t) با توجه به مقادیر بهینه به‌دست آمده برای سفارش مشخص شوند.

از نتایج به‌دست آمده از مدل احتمالی یک دوره‌ای با موجودی تصادفی ابتدای دوره (بیجاری و حجی،۲۰۰٤) می‌توان مقادیر بهینه X_{st} را محاسبه کرد. شیوه محاسبه مقدار بهینه ابتدا از یک مقدار تخمینی آغاز می‌شود و سپس با انجام تغییرات ناچیزی بر روی مقدار X_{st} می‌توان به مقدار بهینه رسید. این برآورد با توجه به رابطه ارائه شده در (بیجاری و حجی،۲۰۰٤)از رابطه (۳) به‌دست می‌آید:

$$X_{st}=R^*_{st}-E(I_{s-1}) \qquad (۳)$$

و برای حالتی که توزیع تقاضا نرمال باشد، برآورد تقریبی X_{st} از رابطه (٤) به‌دست می‌آید

$$X_{st} = \sum_{k=s}^{t} E(d_k) + \propto \sqrt{\sum\nolimits_{k=s}^{t} \sigma_{d_k}^2} - E(I_{s-1}) \qquad (۴).$$

در این قسمت به بیان خصوصیتی پرداخته می شود که با استفاده از آن حجم محاسبات کاهش می یابد. اگر برای دوره t در دوره s سفارش داده شود، در صورتی که هزینه آماده سازی در دوره t کمتر از هزینه نگهداری مقدار تولید مورد نیاز از دوره s تا دوره t-1 باشد، سفارش دهی برای دوره t در دوره s به صرفه نیست. رابطه (۵) این مطلب را نشان می دهد.

$$K_t < \sum\nolimits_{k=s}^{t-1} (h_k).\, x_t \qquad (۵)$$

مقدار x_t نیز با استفاده از رابطه (۶) برآورد می شود.

$$x_t = R_t^* - E(I_{t-1}) \qquad (۶)$$

با توجه به اثبات ارائه شده در (بیجاری و حجی،۲۰۰۴)، برآورد مقدار x_t از رابطه فوق خطای ناچیزی ایجاد می کند، برای افزایش اطمینان در محاسبه و افزایش دقت از رابطه (۷) استفاده می شود. به عبارتی فرض می شود که x_t ۳٪ کمتر برآورد شده است.

$$K_t < \sum\nolimits_{k=s}^{t-1} (h_k).\, x_t.\, 0.97 \qquad (۷)$$

جدول ۱- مدت زمان حل بر حسب ثانیه

تعداد دوره															
۵ دوره					۱۰ دوره					۳۰ دوره					
۰/۷	۰/۶	۰/۴	۰/۶	۰/۶	۲/۲	۲/۸	۲/۶	۲/۸	۲/۶	۴۷/۱	۴۱/۷	۴۷/۱	۴۶/۶	۴۸/۳	زمان حل بر حسب ثانیه
۰/۶	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۵	۲/۵	۲/۹	۲/۶	۱/۹	۲/۳	۴۲/۲	۴۴/۵	۴۱/۵	۴۲/۹	۲۶/۲	
۰/۵	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۵	۲/۳	۲/۷	۲/۶	۲/۱	۲/۷	۲۹/۱	۳۷/۵	۴۴/۵	۴۶/۲	۳۲/۳	
					۲/۲	۲/۸	۲/۶	۲/۸	۲/۶	۳۹/۱	۳۴/۷	۴۲/۸	۴۶/۲	۲۵/۲	
					۲/۵	۲/۹	۲/۶	۱/۹	۲/۳	۳۲/۶	۳۷/۳	۳۷/۶	۳۷/۸	۴۱/۷	
										۳۲/۹	۴۲	۴۲/۳	۴۵/۵	۳۰	

۲-۱-۲- نتایج محاسباتی

برای محاسبه انتگرال‌ها از روش عددی سیمپسون (مهری، ۱۳۷۸) استفاده شده است. ۱۵ مسأله با ۵ دوره، ۲۵ مسأله با ۱۰ دوره، ۳۰ مسأله با ۳۰ دوره حل شده و متوسط مدت زمان حل به ترتیب ۰/۵۵ ثانیه، ۲/۳ ثانیه و ۳۹/۳ ثانیه است. جدول (۱) زمان‌های حل را برای هر یک از مسائل نشان می‌دهد.

۲-۲- تعیین اندازه دسته چند محصولی چند دوره‌ای با تقاضای احتمالی با محدودیت ظرفیت و سطح خدمت

معرفی پارامترها و متغیرها:

$cap(t)$: ظرفیت تولید در دوره t

سایر پارامترها مانند مدل M1 است که یک اندیس i برای هر محصول به آن اضافه می شود، مانند:

X_{it}: مقدار تجمعی سفارش محصول i تا دوره t

مدل ریاضی مساله به صورت زیر است:

مدل M2).

$$\min \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} [K_{it} z_{it} + c_{it} x_{it} + h_{it} E[I_{it}^{+}]] \tag{۸}$$

$$s.t. \quad I_{it} = I_{i,t-1} - d_{it}, \forall t, \forall i \tag{۹}$$

$$x_{it} \leq M z_{it}, \forall t, \tag{۱۰}$$

$$x_{it} \geq 0, \forall t, \forall i \tag{۱۱}$$

$$Pr\{I_{it} \geq 0\} \geq \alpha \tag{۱۲}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{it} \leq cap(t) \quad t = 1, \dots, N \tag{۱۳}$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \forall t,$$

تابع هدف (۸) مجموع هزینه‌های آماده سازی، نگهداری و خرید را برای همه محصولات ودوره ها حداقل می کند. محدودیت (۹) بالانس موجودی را بین دوره t و t-1 نشان می‌دهد. روابط(۱۰) و (۱۱) تضمین می‌کند در صورتی که آماده‌سازی ۱ باشد، تولید انجام شود و در غیر این صورت تولید انجام نشود. محدودیت (۱۲) محدودیت سطح خدمت را برای هر یک از محصولات در هر یک از دوره‌ها نشان می‌دهد. محدودیت (۱۳) نشان دهنده محدودیت ظرفیت در هر دوره است.

۲-۲-۱- روش حل

برای حل این مدل، مسأله به تعداد محصولات به مسائل تک محصولی بدون محدودیت ظرفیت با در نظر گرفتن سطح خدمت تبدیل می‌شود. این مسائل به صورت مدل بیان شده در قسمت ۲-۱ (مدل M1) است که با استفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویای ارائه شده حل می شود و با استفاده از نتایج به‌دست آمده، مقادیر تولید برای هر یک از محصولات در هر دوره به‌دست می آید. سپس با توجه به محدودیت ظرفیت در هر دوره در مسأله چند محصولی، در صورتی که محدودیت ظرفیت در هیچ یک از دوره‌ها نقض نشده باشد، جواب بهینه به‌دست آمده است. اما اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها نقض شده باشد، روش به کار گرفته شده شامل سه مرحله است: ۱- بررسی امکان پذیری؛ ۲- امکان‌پذیر کردن جواب؛ ۳- بهبود جواب.

تولید مسائل با استفاده از روش ارائه شده در مقاله تاریم و کینگزمن (۲۰۰٤) انجام شده است. البته، روش ارائه شده برای تولید ظرفیت هر دوره، در ادبیات موضوع ارائه نشده است. موجودی ابتدای افق

صفر در نظر گرفته شده است. هزینه آماده‌سازی تصادفی بین ۱۵۰۰ تا ۳۰۰۰، هزینه نگهداری تصادفی بین ۱، ۲ و۳، توزیع تقاضا نرمال با میانگین بین ۳۰۰ تا ۸۰۰، انحراف معیار تقاضا در هر دوره برابر است با "میانگین تقاضا×۰/۳۳۳"، $\propto = 0.95$ ، ظرفیت هر دوره مجموع مقادیر $G_{d_{it}}^{-1}(\propto)$ محصولات آن دوره که تصادفی در ۱ یا ۲ ضرب شده است. دسته‌بندی مسائل براساس تعداد متغیرهای ۰و۱ صورت می گیرد. همان‌گونه که در مدل M2 ملاحظه می‌شود، متغیر z_{it} متغیرهای ۰و۱ هستند. بنابراین، دسته‌بندی ارائه شده به‌صورت زیر است: مسائل کوچک: کمتر از ۲۰ متغیر ۰و ۱، مسائل متوسط: ۲۱ تا ۱۰۰ متغیر ۰و۱، مسائل بزرگ: بیشتر از ۱۰۱ متغیر۰و۱. مسائل تولید شده با پنج دوره و سه محصول ، ده دوره و پنج محصول و ۳۰ دوره و ٦ محصول به ترتیب جزو مسائل کوچک، متوسط و بزرگ محسوب می شوند.

۲-۲-۲- تنظیم پارامترهای روش فرابتکاری سرد کردن تدریجی (SA[٤]) و بررسی کارایی روش

روش فراابتکاری سرد کردن تدریجی (SA) از الگوریتم‌های معروفی است که ابتدا در سال ۱۹۸۳ ارائه گردید (کرکپاتریک و همکاران، ۱۹۸۳). این روش جستجو از یک جواب امکان‌پذیر اولیه که مبین یک نقطه از فضای شدنی مساله است، شروع می شود. هر جواب یک مقدار هزینه یا سود مشخص دارد. برای پیمایش در فضای شدنی، به تولید جواب شدنی دیگری با تغییر در جواب فعلی نیاز است، که به آن جواب همسایه[٥] اطلاق می شود. این کار می‌تواند با تغییر کوچکی در یک یا ترکیبی از بعضی از متغیرهای جواب فعلی انجام شود؛ به طوری که یک جواب همسایه با مقدار هزینه یا سود متفاوت تولید نماید. در این روش جواب همسایه به صورت تصادفی تولید می شود. اگر مقدار سود (هزینه) جواب کاندید شده بیشتر (کمتر) از جواب‌های جاری باشد، حرکتی به سوی جواب کاندید شده صورت می‌پذیرد. دما در طول جستجو منطبق با یک تابع به نام زمان‌بندی سرد کردن[٦] و زمان‌بندی ذوب[٧] کاهش می‌یابد. همانند تابعی به صورت رابطه زیر:

$$T_{i+1} = R.T_i, \qquad 0 < R < 1$$

به طوری که T_i دما در تکرار i و R نرخ سرد کردن است. مقادیری از R که بهترین کاربرد را داشته است و بسیار هم استفاده شده و نتایج خوبی را هم در بر داشته است، مقادیری بین ۰/۷ تا ۰/۹۹ بوده است (هاجک، ۱۹۹۵). یکی دیگر از پارامترهای مهم در تعیین کیفیت جواب های SA، تعداد نقاط جستجو شده در فضای مساله در هر دماست. به تعداد این جواب‌ها اصطلاحا طول زنجیره مارکوف[٨] گفته می‌شود. تعیین این پارامتر برای اطمینان از جستجوی نزدیک به جواب محتمل، لازم است به معنی دیگر در هر دما الگوریتم باید به تعادل برسد و به نوعی اکثر همسایگی های ممکن در آن دما بررسی شوند. ساده‌ترین پیشنهاد برای تعیین مقدار زنجیره مارکوف در SA، انتخاب یک مقدار ثابت و مستقل از دمای اولیه است که بنا به توصیه وایت باید در حد امکان به ابعاد مساله نزدیک باشد (وایت،۱۹۸۰). به اختصار، پارامترهای مهم الگوریتم SA موارد زیر را شامل می‌شود:

- نمایش ساختار جواب
- انتخاب جواب اولیه
- مکانیزم ایجاد جواب همسایه
- انتخاب دمای اولیه
- مکانیزم کاهش دما
- طول زنجیره مارکوف

با توجه به بررسی‌های انجام شده تنظیم پارامترها به شرح زیر است:

دمای اولیه : ٦۰۰۰۰۰، روش ایجاد همسایگی: برای ایجاد همسایگی چندین روش بررسی شده که در بین آنها دو روش بهتر به صورت زیر است که برای تولید همسایگی ابتدا روش افقی و سپس روش کم کردن به کار رفته است. روش افقی: در این الگوریتم یکی از محصولات به تصادف انتخاب می‌شود. در صورتی که این محصول دارای دوره‌هایی با آماده‌سازی ۰ و ۱ باشد، این دوره‌ها به دو گروه تقسیم می شوند: ۱- دوره‌ها با آماده‌سازی صفر؛ ۲- دوره‌ها با آماده‌سازی یک. سپس از هر گروه دوره ای به تصادف انتخاب می شود و مقادیر آماده سازی این دو دوره جابه‌جا می شود (دوره‌ای که تولید شده، تولید نمی‌شود و برعکس) روش کم کردن : در این الگوریتم یکی از محصولات به تصادف انتخاب می‌شود. سپس از بین دوره‌های ۲ تا افق برنامه‌ریزی دوره‌ای به تصادف انتخاب می‌شود. در صورتی که آماده‌سازی دوره انتخاب شده ۱ باشد، به صفر تبدیل می‌شود. طول زنجیره مارکوف: ۱۰، طول زنجیره مارکوف با توجه به ابعاد مساله تعیین می‌شود که در مورد مسائل بزرگ در نظر گرفته شده تعداد متغیرهای مساله ٥٤۰ متغیر است که در اینجا با توجه به طول زنجیره مارکوف و تعداد دمای مورد بررسی ٥٥۰ همسایگی بررسی می‌شود که با توجه به تعداد متغیرهای مساله، تعداد مناسبی می‌باشد. نحوه کاهش دما: به صورت تصاعد هندسی با ضریب ۰/۹، معیار توقف: بررسی ٥٥ دما یا عدم تغییر جواب در ۲۰ تکرار متوالی.برای بررسی کارایی روش SA از معیار حد پایین استفاده می شود. حد پایین از مجموع توابع هدف (توابع هزینه) به دست آمده از حل مدل تک محصولی M1 برای هر یک از مسائل محاسبه می‌شود. جداول (۲) ،(۳) و (٤) این مقادیر را در مقایسه با جواب به‌دست آمده (تابع هدف مدل M2) از روش SA نشان می‌دهد. درصد انحراف از رابطه (١٤) محاسبه می شود

$$\text{درصد انحراف از حد پایین} = \frac{(\text{حد پایین} - \text{جواب SA})}{\text{حد پایین}} \times 100 \qquad (14)$$

نتایج به‌دست آمده برای ٥ دوره و ۳ محصول، ۱۰ دوره و ٥ محصول و ۳۰ دوره و ٦ محصول در جداول (۲)،(۳)و(٤) آمده است:

جدول ۲- مقایسه حد پایین و جواب بدست آمده از روش SA (پنج دوره و سه محصول)

	جواب روش SA	حد پایین	درصد انحراف از حد پایین
مساله ۱	۴۷۶۴۳/۴۴۲	۳۸۴۷۹/۷۳	۱۹/۲۳٪
مساله ۲	۴۱۰۹۷/۶۲	۳۶۲۳۰/۴۳	۱۱/۸۴٪
مساله ۳	۴۶۵۸۳/۰۷	۳۹۶۵۲/۳۶	۱۴/۸۸٪
مساله ۴	۴۴۹۶۵/۲۹	۳۸۸۴۷	۱۳/۶۱٪
مساله ۵	۴۴۱۳۲/۶۴	۳۸۴۶۹/۲۴	۱۲/۸۳٪
مساله ۶	۴۲۱۲۱/۳۱	۳۷۳۵۲/۱۲	۱۱/۳۲٪
مساله ۷	۴۸۵۹۴/۱۸	۴۰۹۸۴/۳۵	۱۵/۶۵٪
مساله ۸	۴۳۹۶۲/۶۵	۳۹۰۲۶/۶۲	۱۱/۲۳٪
مساله۹	۴۶۶۴۳/۲۰	۳۸۵۴۱/۲۲	۱۷/۳۷٪
مساله ۱۰	۴۳۵۶۷/۳۳	۳۹۷۶۱/۰۴	۸/۷۴٪

جدول ۳- مقایسه حد پایین و جواب بدست آمده از روش SA (ده دوره و پنج محصول)

	جواب روش SA	حد پایین	درصد انحراف از حد پایین
مساله ۱	۱۵۳۳۲۱/۸	۲۰۰۱۴۶/۱	۴/۶۴٪
مساله ۲	۱۵۴۱۹۰/۵	۱۴۱۱۰۶/۲	۸/۴۹٪
مساله ۳	۱۵۴۱۵۹/۳	۱۴۰۰۸۵/۴	۹/۱۳٪
مساله ۴	۱۵۳۶۵۴/۲	۱۴۰۰۶۸/۶	۸/۸۴٪
مساله ۵	۱۵۵۱۹۲/۲	۱۴۴۰۱۲/۹	۷/۲۰٪
مساله ۶	۱۵۶۲۴۱/۱	۱۴۵۵۲۱/۹	۶/۸۶٪
مساله ۷	۱۵۱۴۳۶/۷	۱۴۰۹۸۵/۴	۶/۹۰٪
مساله ۸	۱۵۵۱۳۲/۹	۱۴۲۳۴۱/۶	۸/۲۵٪
مساله۹	۱۵۲۳۲۶/۵	۱۴۲۹۸۵/۱	۶/۱۵٪
مساله ۱۰	۱۵۴۶۷۲/۲	۱۴۰۳۶۵/۵	۹/۲۵٪

جدول ٤- مقایسه حد پایین و جواب بدست آمده از روش SA (سی دوره و شش محصول)

	جواب روش SA	حد پایین	درصد انحراف از حد پایین
مساله ۱	۶۹۵۹۶۴/۸	۶۸۱۷۱/۳	۲/۰۵٪
مساله ۲	۷۱۸۹۳۰/۶	۶۹۲۳۱۷	۳/۷۰٪
مساله ۳	۷۴۴۷۹۵/۸	۷۲۶۸۰۲/۱	۲/۴۲٪
مساله ۴	۷۳۴۵۱۱/۶	۶۹۸۸۲۱	۴/۸۶٪
مساله ۵	۷۵۲۴۰۵/۱	۷۱۱۲۵۲/۷	۵/۴۷٪
مساله۶	۷۲۵۴۴۴/۲	۷۰۹۸۵۶/۴	۲/۱۵٪

با توجه به جداول (۲)، (۳) و (٤) متوسط درصد انحراف از حد پایین به طور متوسط به ترتیب ٪۱۳/۷، ٪۷/٦ ، ٪۳/٤ می باشد. با توجه به مقادیر به‌دست آمده می توان به نتایج زیر دست یافت:

- با افزایش ابعاد مساله متوسط درصد انحراف از حد پایین کاهش می‌یابد.
- با افزایش متوسط هزینه آماده سازی به نگهداری درصد انحراف از حد پایین افزایش می‌یابد.

زمان حل برای این مسائل بررسی شده و نتایج آن در جدول (۵) برای هر یک از مسائل برحسب ثانیه نشان داده شده است.

جدول ۵- زمان حل برحسب ثانیه با روش SA

	۵ دوره و ۳ محصول	۱۰ دوره و ۵ محصول	۳۰ دوره و ۶ محصول
مساله ۱	۱۹۸	۲۵۳	۵۷۶
مساله ۲	۱۳۲	۲۷۳	۵۴۵
مساله ۳	۱۲۴	۲۳۹	۵۶۹
مساله ۴	۱۳۹	۲۴۲	۵۵۰
مساله ۵	۱۸۶	۲۳۱	۵۸۳
مساله۶	۱۸۰	۲۴۰	۵۷۵
مساله ۷	۱۴۵	۲۵۵	
مساله ۸	۱۳۶	۲۶۴	
مساله۹	۱۹۰	۲۸۰	
مساله ۱۰	۱۵۰	۲۴۶	

متوسط زمان حل به ترتیب برای ۵ دوره و ۳ محصول، ۱۰ دوره و ۵ محصول و ۳۰ دوره و ٦ محصول به ترتیب ۱٤۳، ۲۲۸و ٥٦٦ ثانیه می‌باشد

.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

استفاده از مفهوم سطح خدمت به جای هزینه کمبود از دو جهت حائز اهمیت است: اولا تعیین هزینه کمبود در سیستم‌های تولیدی کار راحتی نیست و ثانیاً استفاده از مفهوم سطح خدمت رضایت کامل مدیران را حاصل می کند. از طرفی، با توجه به اینکه مقادیر تقاضا همیشه به صورت دقیق مشخص نیست، بررسی تقاضا در حالت احتمالی بحث مهمی در مسائل تعیین اندازه دسته تولید محسوب می‌شود، بنابراین، در این مقاله به استفاده از مفهوم سطح خدمت در مدل‌های تعیین اندازه دسته تک‌محصولی چند دوره‌ای بدون محدودیت ظرفیت و چندمحصولی چند دوره‌ای با محدودیت ظرفیت با تقاضای احتمالی پرداخته شده است. در حالت تک محصولی جواب بهینه برای نخستین بار با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا به‌دست آمده است که با افزایش ابعاد مساله زمان رسیدن به جواب بهینه حدود ۷۰ برابر افزایش می‌یابد که علت اصلی آن حجم بالای محاسبات انتگرالی می‌باشد. البته، این زمان همچنان در حد ثانیه است و معمولا در دوره‌های برنامه‌ریزی میان مدت این زمان حل مناسب است. در حالت چند محصولی با مقایسه انجام شده با حد پایین می‌توان نتیجه گرفت با افزایش ابعاد مساله متوسط درصد انحراف از حد پایین کاهش می‌یابد. با افزایش متوسط هزینه آماده‌سازی به نگهداری درصد انحراف از حد پایین افزایش می‌یابد. همچنین زمان حل تقریبا چهار برابر افزایش می‌یابد که با توجه به حجم زیاد محاسبات، مدت زمان حل مناسب است. برای کارهای آینده، مقایسه روش فراابتکاری سرد کردن تدریجی با سایر روش‌های فراابتکاری، حل مساله تعیین اندازه دسته تولید در حالت چند محصولی و چند دوره‌ای با محدودیت ظرفیت با تقاضای احتمالی در حالت فروش از دست‌رفته با در نظر گرفن هزینه کمبود با استفاده از روش‌های فراابتکاری پیشنهاد می‌شود.

منابع:

بیجاری، م. ، و حجی، ر.(۱۳۸٤). برنامه‌ریزی تولید با تقاضای احتمالی و محدودیت ظرفیت ، چهارمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی صنایع.

مهری، ب. (۱۳۸۷)، محاسبات عددی، تهران: آییژ.

Bijari M. ,Haji R.(2004)."The Single Period News- vendor Problem With Stochastic Initial Inventory" , *International Journal of Engineering Science*, 15,47-54.

Bitran G.R. ,Yanasse H.H.(1984)."Deterministic approximations to stochastic production problems", *Operations Research* , 32, 999-1018.

Gupta ,S.K.(1977)."Decision Rules in Production Planning" ,*Decision Sciences*, 8,521-533.

Guan Y., Liu T.(2010)."Stochastic lot-sizing problem with inventory-bounds and constant order-capacities", *European Journal of Operational Research, 207*, 1398–1409.

Hajek, B.(1995) ."Cooling schedules for optimal annealing" , *Mathematics of Operations*, 13,529-614.

Huang k., Kucukyavuz s.(2008)."On stochastic lot-sizing problems with random lead times" ,*Operations Research Letters ,36*, 303–308.

Khang D.B., Fujiwara O.,(1993)."Multi period network flow problems with service level requirements" *,IIE Transaction*, 25, 2, 104-110.

Kirkpatrick,S.,Gelatt,Jr.C.D,Vecchi M.P.(1983). "Optimization by simulated annealing": ,*Science*,220,67-680.

Leachman R.C., Gascon A. (1988). "A heuristic scheduling policy for multi-item, single-machine production systems with time-varying tochastic demands", *Management Science*,34 ,377-390.

Leachman R.C., Xiong Z.K., Gascon A., Park K. (1991).Note: "An improvement to the dynamic cycle lengths heuristic for scheduling the multi-item, single-machine", *Management Science* ,37 (9) ,1201-1205.

Mula J.,Poler R., Garcı´a-Sabater J.P., LarioF.C. (2006). "Models for production planning under uncertainty: A review" , *Production Economics*,103,271-285.

Sox C.R.,(1997). "Dynamic Lot-sizing with random demand and non-stationary costs", *Operations Research letter*,20,155-164.

Sox,C. R.,Muckstadt, J.A.(1996). Multi-item, multi-period production planning with uncertain demand, *IIE Transactions*, 28, No. 891-900.

Sox, C.R., Jackson P.L., Bowman Alan, Muckstadt J. A.(1999). "A review of the stochastic lot scheduling problem", *International journal of Production Economics*,62,181-200.

Sox C.R., Muckstadt J.A.(1997). "Optimization-based planning for the stochastic lot scheduling problem", *IIE Transaction*,29 (5) ,349-357.

Tarim S.Armagan, G.Kingsman Brian(2004). "The stochastic dynamic production/ inventory lot-sizing problem with service-level constraints", *International journal of production economics*, 88,105-119.

TempelmeierH.(2007). "On the stochastic uncapacitated dynamic single-item lotsizing problem with service level constraints", *European Journal Of Operational Research*,181,184-194.

White,S.R.(1980). "Concepts of scale in simulation annealing" , *Proceeding IEEE International conference on computer design*,(Port Chester),646-651.

Zhang M.(2011). "Two-stage minimax regret robust uncapacitated lot-sizing problems with demand uncertainty", *Operations Research Letters*,*39* , 342–345.

پي نوشت:

[1]Master Production Schedule
[2]Dynamic Cycle Lengths
[3]Robust
[4]Simulated Annealing
[5] Neighboorhood Solution
[6] Cooling Schedule
[7] Annealing Schedule
[8] Morkov Chain