مدیریت تولید و عملیات، دوره هفتم شماره (۱)، پیاپی(۱۲)، ، بهار و تابستان ۱۳۹۵
دریافت:۹۱/۸/۳۰ پذیرش: ۹۲/٦/۵
صص: ۱۹۰ -۱۷۹

# ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی

**علیرضا علی نژاد[1]* ، نوید ترابی[2]**

۱- استادیار دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران
۲- کارشناس ارشد مهندسی صنایع ،دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران

## چکیده

در این مقاله، به بررسی ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی پرداخته می شود. در مطالعات پیشین، از تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی واحد ها استفاده شده است، ولی روش تحلیل پوششی داده‌ها روش کاملی نیست، چون از تمام اطلاعات ورودی و خروجی به نحو کامل بهره نمی‌برد. به همین علت، ترکیب این روش با سایر روش ها باعث بهتر شدن دقت و کیفیت این روش خواهد شد. ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی روشی ایجاد خواهد نمود که در تصمیم‌گیری و ارزیابی واحد های تصمیم‌گیرنده بسیار مفید خواهد بود. در این تحقیق، این مدل ترکیبی در حالت فازی به کار گرفته خواهد شد و مدلی جدید پیشنهاد خواهد شد که کاربردی تر و به شرایط واقعی نزدیک تر باشد.

**واژه های کلیدی**: روش تحلیل پوششی داده‌ها ، شرایط فازی، شرایط لنگی مکمل قوی[1]

---

*نویسنده مسئول: Alinezhad@qiau.ac.ir

## ۱– مقدمه

تحلیل پوششی داده ها[2] ابزار بسیار مناسبی برای ارزیابی عملکرد شرکت ها و سازمان های مختلف است که با توجه به دریافت ورودی‌ها و خروجی‌های مورد نظر می‌تواند به ارزیابی و بررسی دقیق بپردازد (سویوشی[3]، ۲۰۰۱). این روش با توجه به توانایی بالایی که دارد می‌تواند به بررسی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که خروجی را به ورودی تبدیل می‌نمایند، بپردازد. برای استفاده از این روش باید وزن مناسبی برای هریک از ورودی‌ها و خروجی‌ها یافت تا این داده‌ها به بهترین صورت استفاده شوند (چارنز و همکاران[4]،۱۹۸۹). این روش مناسب، در مواردی با مشکلاتی مواجه می گردد که از جمله می‌توان به اعلام درصد بالای کارایی در شرکت‌های تحت بررسی اشاره نمود، بطوری که تعداد زیادی شرکت را کارا اعلام نماید و تنها تعداد کمی از شرکت‌ها ناکارا اعلام گردد. این مشکل در مواردی رخ می دهد که تقویت کننده های تحلیل پوششی داده‌ها صفر گردد و این مساله باعث تاثیر منفی در بررسی های تحلیل پوششی داده‌ها می‌گردد (سویوشی و گوتو[5]، ۲۰۰۹).در گذشته گونه هایی برای محدودیت‌های تقویت کننده ( متغییر های ثانویه ) ارائه شد (تامپسون و همکاران[6]،۱۹۸۶). ولی این روش ها به علت نیاز داشتن به اطلاعات قبلی و تجربیات گذشته چندان مفید واقع نشدند. تا این که در مقالات سویوشی و سکیتانی[7](۲۰۰۷) و سویوشی و گوتو(۲۰۰۹) با استفاده از ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و شرایط لنگی مکمل قوی موفق به ایجاد روشی شدند که در بررسی‌هایش نیاز به اطلاعات قبلی ندارد و این خود عامل بسیار مهمی است که در کاربردی‌تر شدن مدل بسیار مفید خواهد بود. علیرغم این حسن مفید ، کاربرد شرایط لنگی مکمل قوی[8] تضمینی نخواهد داد که تعداد واحد های کارا کمتر گردد (سویوشی و گوتو، ۲۰۰۹). با توجه به این که این مدل در شرایط قطعی استفاده می‌گردد؛ ایجاد مدلی که در شرایط عدم قطعیت نیز مفید واقع گردد ناگزیر است، تا این که مدلی پدید آید که به شرایط واقعی نزدیک‌تر باشد و از آن بتوان در سطح گسترده‌تری استفاده نمود. در این قسمت به پژوهش‌ها پیشین اشاره می‌گردد.

**تحلیل پوششی داده ها**: این دسته پژوهش‌ها ابتدا تنها از داده‌های قطعی استفاده می نمود که این کار محدودیت‌هایی را برای این روش پدید می آورد که از جمله این محدودیت‌ها: دوری از شرایط واقعی و طبیعی مسائل و همچنین، کاربرد کمتر اینگونه مدل‌ها بود که از جمله آن پژوهش‌ها می توان به چن[9](۲۰۰٤) که بررسی رتبه‌بندی واحدها با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها پرداخته است که البته همانطور که ذکر شد؛ این تحقیق در حالتی که داده‌های مساله قطعی باشند انجام گرفته است.

**تحلیلی پوششی داده‌ها در حالت عدم قطعیت**: دسته بعدی را می توان پژوهش‌های مهمی نامید که تحلیل پوششی داده‌ها را در حالتی که داده‌های غیر قطعی موجود است، همچون داده‌های احتمالی و فازی، استفاده کردند که از آن جمله می‌توان به پژوهش‌های نخستین در این موضوع، همچون تحقیق سنگوپتا[10](۱۹۹۲) که شروع کننده پژوهش‌های تحلیل پوششی داده‌ها در حالت فازی بود و همچنین،

پژوهش‌های کوپر و همکاران[۱۱](۲۰۰۲) که نظریه‌هایی را مبنی بر در نظرگیری محدودیت‌های احتمالی در مدل، هنگامی که ورودی‌ها و خروجی‌های مورد استفاده در تحلیل پوششی داده‌ها در حالت احتمالی قرار دارند، مطرح نمودند. همچنین، می توان به پژوهش‌های نوین‌تر همچون چانگ و همکاران[۱۲](۲۰۱۲) و وو و همکاران[۱۳](۲۰۱۰) اشاره نمود که در این پژوهش‌ها داده‌های غیر قطعی و فازی در حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط خاص به کار گرفته شده است.

**ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با دیگر مدل‌ها** :دسته دیگری از پژوهش‌ها به ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با دیگر مدل‌های تصمیم‌گیری پرداخته است که این روش باعث کارآمدتر شدن مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و نیز باعث قدرتمندتر شدن این روش گردیده است. از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به (استرن[۱۴]، ۱۹۹۸)و (استرن،۲۰۰۰) و (سویوشی و همکاران،۲۰۰۰و۲۰۰۱و۲۰۰۶و۲۰۰۹و۲۰۱۲) اشاره نمود.

**ترکیب تحلیل پوششی دادها با شرایط لنگی مکمل قوی**: ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی نخستین بار توسط سویوشی و سکیتانی (۲۰۰۷) انجام شد و در پژوهش‌های سویوشی و گوتو (۲۰۰۹و ۲۰۱۰ و ۲۰۱۲) در شکل‌های دیگری پی‌گرفته شد. این روش مفید دارای نقاط ضعفی است که از آن جمله می‌توان به در نظر گرفتن این روش در حالت قطعی اشاره نمود. در تحقیق پیش رو سعی شده است تا این مدل در حالت غیر قطعی نیز به کار برده شود تا مدلی کاربردی‌تر و در عین حال به شرایط واقعی نزدیک‌تر ایجاد گردد.

در این تحقیق و در قسمت دوم مبانی اولیه موضوع (ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی) و دیگر مبانی اولیه مورد استفاده در این مقاله بررسی خواهد شد. در قسمت سوم به مدل پیشنهادی ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی پرداخته می‌شود. همچنین، در قسمت چهارم مثالی عددی در رابطه با مدل پیشنهادی آورده شده است و به مقایسه عددی مدل جدید با دیگر مدل‌های موجود پرداخته خواهد شد. همچنین، در قسمت پنجم به نتیجه‌گیری پرداخته می شود.

## ۲- مبانی اولیه موضوع

در این بخش به مبانی اولیه موضوع و الگوهای نظری آن پرداخته می شود.

### ۲-۱- شرایط لنگی مکمل قوی

شرایط لنگی مکمل قوی ارتباطی بین مدل اولیه و ثانویه است. در ارتباط با این موضوع است را باید ارتباطاتی که بین مدل اولیه و ثانویه برقرار استرا توضیح داد.

تعداد متغیرها در مدل ثانویه برابر با تعداد محدودیت‌ها در مدل اولیه است و همین طور تعداد محدودیت‌ها در مدل ثانویه برابر با تعداد متغیرها در مدل اولیه است. شرایط لنگی مکمل قوی ارتباطی خاص بین محدودیت‌های مدل اولیه با کمبود ( مقدار مثبت ) متغییرهای کمبود در مدل ثانویه است(سویوشی و سکیتانی ، ۲۰۰۷).

شرایط لنگی مکمل قوی این طور بیان می دارد که اگر $x^*$ جواب بهینه مدل اولیه و $y^*$ جواب بهینه مدل ثانویه باشد و همچنین $s^*$ مقادیر بهینه متغیرهای کمبود مساله اولیه و $u^*$ مقادیر بهینه متغیرهای مازاد مساله ثانویه باشد در این صورت روابط ۱ و ۲ بین جواب‌های بهینه و متغیرهای هر مدل برقرار است:

$$x^* * u^* = 0 \qquad (۱)$$

$$y^* * s^* = 0 \qquad (۲)$$

### ۲-۲- تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده‌ها روشی ناپارامتریک است که می‌تواند به ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده که دارای چندین ورودی و خروجی است، بپردازد. این روش دارای مدل‌های متفاوتی است که در اینجا دو مورد از مدل‌های اولیه این روش ذکر می‌گردد.

#### ۲- ۲- ۱- مدل CCR در ورودی محور:

هدف این مدل پیدا کردن واحد تصمیم‌گیرنده مجازی است که با حداقل ورودی بتواند خروجی $Y_0$ را تولید کند. مدل ۳ بیانگر مدل CCR در ورودی محوراست (چارنز و همکاران،۱۹۷۸).

$$\begin{aligned}
&\min = \theta && (۳)\\
&\text{s.t:}\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \Theta x_{io}, && i = 1, \dots, s\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, && r = 1, \dots, s\\
&\lambda_j \ge 0, && j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

#### ۲- ۲-۲- مدل BCC در ماهیت وردی:

این مدل با توجه به مدل CCR ارائه گردید. مجموعه امکان تولید این مدل با حذف اصل بی‌کرانی اشعه از مجموعه اصول تحلیل پوششی داده‌ها به‌دست می‌آید. مدل ٤ بیانگر مدل BCC در ماهیت ورودی است.

$$\begin{aligned}
&\min = \theta && (۴)\\
&\text{s.t:}\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \Theta x_{io}, && i = 1, \dots, s\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, && r = 1, \dots, s\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\\
&\lambda_j \ge 0, && j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

### ۲-۳- ترکیب تحلیل پوششی دادها با شرایط لنگی مکمل قوی

در مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی x , y به ترتیب داده‌های ورودی و خروجی هستند که برای j=(1,...,n) واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده است. همچنین، $u_r$ وزن داده شده به خروجی rام و همچنین $v_i$ وزن داده شده به ورودی i ام است. $\eta$ نیز برای بهینه نگه داشتن وضعیت کمبود مکمل قوی به کار می‌رود. همچنین، e=(1,1,...,1) برداری یکه است و علامت w نوع بازده به مقیاس را مشخص می نماید. مدلی که سویوشی و گوتو(۲۰۰۷)ارائه کرد به صورت مدل (۵) است:

$$\begin{aligned}
&\max \ \eta && (۵)\\
&\text{s.t:}\\
&\theta x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge 0, \ i = 1, \dots, m\\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, \ r = 1, \dots, s
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{\mathrm{j}} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{i}x_{i\,o} = 1$$

$$-\sum_{i=1}^{m} v_{i}x_{i\,o} + \sum_{r=1}^{s} u_{r}y_{r\,j} + w \le 0\,, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\theta = \sum_{r=1}^{s} u_{r}y_{r\,o} + w$$

$$\lambda_{\mathrm{j}} + \sum_{i=1}^{m} v_{i}x_{i\,j} - \sum_{r=1}^{s} u_{r}y_{r\,j} - w\, e^{T} \ge \eta\ \mathrm{e}^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}$$

$$v_{i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\mathrm{j}}\mathrm{x}_{\mathrm{i\,j}} + \theta x_{i\,o} \ge \eta\, e^{T}, i = 1, \dots, m$$

$$u_{r} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\mathrm{j}}\mathrm{y}_{\mathrm{r\,j}} - y_{r\,o} \ge \eta e^{T}\ , \mathrm{r} = 1, \dots, \mathrm{s}$$

$$\begin{array}{ll} v_{i} \ge 0\ , & \mathrm{i=1,\dots,m} \\ u_{r} \ge 0\ , & \mathrm{r=1,\dots,s} \\ \lambda_{\mathrm{j}} \ge 0\ , & \mathrm{j=1,..,n} \\ \eta \ge 0\ , & \mathrm{w,\ \ free} \end{array}$$

**۲-٤ - تحلیل پوششی داده‌های فازی**

پژوهش‌ها در مورد تحلیل پوششی داده‌های فـازی از تحقیق سنگوپتا (۱۹۹۲) آغاز گردیـد. ایـن تحقیـق دو رویکرد را برای حل مسائل تحلیل پوششی داده‌ها که داده‌های غیـر قطعـی در آنهـا بـه کـار رفتـه بـود، پیشنهاد می‌داد. نخست، رویکردی احتمالی برای حـل مسائل و دومین راه، رویکردی بر اساس سیستم هـای فـازی اسـت. رویکـرد دوم بـر مبنـای پـژوهش‌هـای زاده[15](۱۹۷۸) قرار دارد. در تحقیـق سـنگوپتا(۱۹۹۲) دو تابع عضویت برای اعداد فـازی مطـرح مـی‌شـود. تابع عضویت خطی و غیر خطی که از مزایای استفاده از تابع عضویت خطی می توان به قابلیـت اسـتفاده از مزایای برنامـه ریـزی خطـی در حـل مسـائل تحلیـل پوششی داده‌ها در حالت غیر قطعی، اشـاره نمـود. در این مقاله نیز از رویکردی بر اساس برنامه‌ریزی خطی در مدل ترکیبی مورد بحث (ترکیب تحلیـل پوششـی داده‌ها و آنالیز تشخیصـی در حالـت فـازی) اسـتفاده شده است.

**۵- ۲- روش غیر فازی سازی**

از روش‌های غیر فازی سـازی مـدل‌هـای فـازی روشی اسـت کـه در پـژوهش‌هـا خمینـز[16](۱۹۹٦) و خمینز و همکاران(۲۰۰۷) ارائه کـرده‌انـد. ایـن روش براساس تعریف ارزش انتظاری و فاصله انتظـاری در اعداد فازی که توسـط یـاگر[17] (۱۹۸۱) و دوبـویس و پراد[18](۱۹۸۷) گسترش یافت و توسط خمینز(۱۹۹٦) و هیلپرن[19](۱۹۹۲) پیگیری شد. بر اسـاس ایـن روش می توان طرفین معادلـه یعنـی $\tilde{a}$ بـه عنـوان ضـرایب محدودیت و $\breve{b}$ به عنوان عدد سـمت راسـت کـه بـه صورت فازی هستند را بـه اعـداد غیـر فـازی تبـدیل نمود این روش از روابط (٦) برای ایـن کـار اسـتفاده می نماید.

$$\mu_M(\tilde{a}\,,\tilde{b}) = \begin{cases} 0 & if\ E_2^a - E_1^b < 0 \\ \dfrac{E_2^a - E_1^b}{E_2^a - E_1^b - (E_1^a - E_2^b)} & if 0 \in \left[\mathrm{E}_1^{\mathrm{a}} - \mathrm{E}_2^{\mathrm{b}}\,, \mathrm{E}_2^{\mathrm{a}} - \mathrm{E}_1^{\mathrm{b}}\right] \\ 1 & IF\ E_1^a - E_2^b > 0 \end{cases} \quad (٦)$$

زمانی که $\mu_M(\tilde{a}\,,\tilde{b}) > \alpha$ می توان این طور بیان کرد که $\tilde{a} \ge \tilde{b}$ و بـا در نظر گـرفتن درجـه $\alpha$ بـه

صورت $\tilde{b} \geq_{\alpha} \breve{a}$ نوشته می شود. بر اساس تعریف معادله فازی در تحقیق پارا و همکاران[20] (۲۰۰۵) برای هر جفت از اعداد فازی $\tilde{a}, \tilde{b}$ می توان گفت که $\breve{a}$ برابر با $\tilde{b}$ در درجه α، که اگر روابط فوق همزمان با هم به صورت $\breve{a} \leq_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{b},\ \breve{a} \geq_{\frac{\alpha}{2}} \tilde{b}$ وجود داشته باشند. این معادلات به صورت رابطه (۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{\alpha}{2} \leq \mu_M(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad (۷)$$

حال اگر مدل فازی نمونه بصورت مدل (۸) وجود داشته باشد :

$$\min\ z = \tilde{c}^t x \qquad (۸)$$

$$\text{s.t:}$$
$$\tilde{a}_i x \geq \tilde{b}_i,\quad i = 1, \dots, l$$
$$\tilde{a}_i x = \tilde{b}_i,\quad i = l+1, \dots, m$$
$$x \geq 0$$

بر اساس پیشنهاد خمینز و همکاران(۲۰۰۷) بردار تصمیم $x \epsilon R^n$ در درجه α موجه خواهد بود در صورتی که شرط $min_{i=1,\dots,m}\{\mu_M(\tilde{a}_i x, \tilde{b}_i)\} = \alpha$ برقرار باشد. بر اساس(٦) و(۸) روابط $\tilde{a}_i x \geq \tilde{b}_i$ و $\tilde{a}_i x = \tilde{b}_i$ برابر با روابط (۹)و(۱۰) می شوند.

(۹)

$$\frac{E_2^{a_i x} - E_1^{b_i}}{E_2^{a_i x} - E_1^{a_i x} + E_2^{b_i} - E_1^{b_i}} \geq \alpha, i = 1, \dots, l$$

(۱۰)

$$\frac{E_2^{a_i x} - E_1^{b_i}}{E_2^{a_i x} - E_1^{a_i x} + E_2^{b_i} - E_1^{b_i}} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}, i = 1 + l, \dots, m$$

این روابط به صورت (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) می‌تواند نوشته شود:

$$[(1-\alpha)E_2^{a_i x} + E_1^{a_i}]x \geq \alpha E_2^{b_i} + (1-\alpha)E_1^{b_i},\quad i = 1, \dots, l \qquad (۱۱)$$

$$\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{a_i x} + \frac{\alpha}{2}E_1^{a_i}\right]x \geq \frac{\alpha}{2}E_2^{b_i} + (1-\frac{\alpha}{2})E_1^{b_i}, i = l+1, \dots, m \qquad (۱۲)$$

$$\left[\frac{\alpha}{2}E_2^{a_i x} + (1-\frac{\alpha}{2})E_1^{a_i}\right]x \geq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{b_i} + \frac{\alpha}{2}E_1^{b_i}, i = l+1, \dots, m \qquad (۱۳)$$

با استفاده از رتبه‌بندی خمینز(۱۹۹٦) و استفاده از روش خمینز و همکاران (۲۰۰۷) حل موجه $x^0$ به صورت حل بهینه α قابل پذیرش است. می توان راه‌حل موجه را برای این مدل اثبات نمود. اگر و فقط اگر برای تمام بردار تصمیم‌های موجه بیان گردد که می تواند x به صورت: $\check{a}_i x \geq_{\alpha} \tilde{b}_i, i = 1, \dots, l$ و $\check{a}_i x \approx_{\alpha} \tilde{b}_i, i = l+m, \dots, 1$ و $x \geq 0$ باشد، رابطه (١٤) به دست می‌آید:

$$\tilde{c}^t x \geq \frac{1}{2}\tilde{c}^t x^o \qquad (١٤)$$

بنابراین، $x^0$ بهترین گزینه است که در حداقل درجه $\frac{1}{2}$ مخالف دیگر بردار های موجه باشد. رابطه (١٤) می‌تواند به صورت رابطه (۱۵) دوباره بازنویسی شود.

$$\frac{E_2^{c^t x} + E_1^{c^t x}}{2} \geq \frac{E_2^{c^t x^o} + E_1^{c^t x^o}}{2} \qquad (۱۵)$$

برآیند موضوع به این صورت می شود که، استفاده از تعاریف فاصله انتظاری و ارزش انتظاری برای اعداد فازی، معادل مدل α-parametric در حالت

قطعی است که در این صورت مدل (۸) را می‌توان به صورت مدل (۱٦) نوشت:

$$\min \quad EV(\tilde{c})\, x \qquad (۱٦)$$

$$\begin{aligned}
&\text{s.t:}\\
&\left[(1-\alpha)E_2^{a_i x} + E_1^{a_i}\right]x \\
&\quad \geq \alpha E_2^{b_i} + (1-\alpha)E_1^{b_i}, \quad i = 1, \dots, l\\
&\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{a_i x} + \frac{\alpha}{2}E_1^{a_i}\right]x \\
&\quad \geq \frac{\alpha}{2}E_2^{b_i} + (1-\frac{\alpha}{2})E_1^{b_i}, \quad i = l+1, \dots, m\\
&\left[\frac{\alpha}{2}E_2^{a_i x} + (1-\frac{\alpha}{2})E_1^{a_i}\right]x \\
&\quad \geq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^{b_i} + \frac{\alpha}{2}E_1^{b_i}, i = l+1, \dots, m\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

## ۳- مدل پیشنهادی

### ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی:

مدلی که از ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قـوی در حالـت غیـر قطعـی بـه دسـت می‌آید اصولی مانند مدل قطعی دارد با این تفاوت کـه در این مدل جدیـد ورودی‌هـا و خروجـی‌هـا یعنـی بردارهای $x$ و $y$ بـه صـورت فـازی در نظـر گرفتـه شده‌اند. با توجه به فازی بودن و عـدم قطعیـت مـدل جدید و با توجه به تغییرات ایجاد شـده در آن، مـدل جدید پیشنهادی به صـورت مـدل (۱۷) نوشـته شـده است.

$$\max \quad \eta \qquad (۱۷)$$

$$\begin{aligned}
&\text{s.t:}\\
&\theta \tilde{x}_{i\,o} - \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_{\,j}\tilde{x}_{i\,j} \geq 0 \;, i = 1, \dots, m\\
&\sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{r\,j} \geq \tilde{y}_{r\,o} \;, r = 1, \dots, s\\
&\sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\\
&\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{i\,o} = 1\\
&-\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{i\,j} + \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{r\,j} + w \leq 0 \,, j = 1, \dots, n\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r\,o} + w = \theta\\
&\lambda_j + \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{i\,j} - \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{r\,j} - w\, e^T \geq \eta\; e^T,\\
&\quad j = 1, \dots, n\\
&v_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{i\,j} + \theta \tilde{x}_{i\,o} \geq \eta\, e^T, i = 1, \dots, m\\
&u_r + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{r\,j} + \tilde{y}_{r\,o} \geq \eta \quad e^T, r = 1,\dots,s\\
&v_i \geq 0, \qquad i=1,\dots,m\\
&u_r \geq 0, \qquad r=1,\dots,s\\
&\lambda_j \geq 0, \qquad j=1,\dots,n\\
&\eta \geq 0, \qquad w, \text{ free}
\end{aligned}$$

برای تبـدیل مـدل فـازی (۱۷) بـه مـدل قطعـی از روش غیرفـازی‌سـازی کـه در قسـمت مبـانی اولیـه توضیح داده شد استفاده می‌گردد که بعد از استفاده از این روش مدل (۱۷) به صورت (۱۸) نوشته می‌شود:

$$\max \quad \eta \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned}
&\text{s.t:}\\
&\theta\left[(1-\alpha)E_2^{X_{io}} + \alpha E_1^{X_{io}}\right]\\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[(1-\alpha)E_2^{X_{ij}} + \alpha E_1^{X_{ij}}\right] \geq 0\;,\\
&\quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{\mathrm{j}}\left[(1-\alpha)E_2^{Y_{rj}}+\ \alpha E_1^{Y_{rj}}\right] \geq \left[(1-\alpha)E_2^{Y_{ro}}+\ \alpha E_1^{Y_{ro}}\right], \mathrm{r}=1,\dots,\mathrm{s}$$

r=1,...,s

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{\mathrm{j}}=1$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i\left[(1-\alpha)E_2^{X_{io}}+\ \alpha E_1^{X_{io}}\right]=1$$

$$-\sum_{i=1}^{m} v_i\left[(1-\alpha)E_2^{X_{ij}}+\ \alpha E_1^{X_{ij}}\right] + \sum_{r=1}^{s} u_r\left[(1-\alpha)E_2^{Y_{rj}}+\ \alpha E_1^{Y_{rj}}\right]+w\leq 0,\quad j=1,\dots,n$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r\left[(1-\alpha)E_2^{Y_{ro}}+\ \alpha E_1^{Y_{ro}}\right]+w=\theta$$

$$\lambda_{\mathrm{j}}+\sum_{i=1}^{m} v_i\left[(1-\alpha)E_2^{X_{ij}}+\ \alpha E_1^{X_{ij}}\right] - \sum_{r=1}^{s} u_r\left[(1-\alpha)E_2^{Y_{rj}}+\ \alpha E_1^{Y_{rj}}\right]-we^T \geq\ \eta\, e^T, \mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{n}$$

$$v_i-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{\mathrm{j}}\left[(1-\alpha)E_2^{X_{ij}}+\ \alpha E_1^{X_{ij}}\right] + \theta\left[(1-\alpha)E_2^{X_{io}}+\ \alpha E_1^{X_{io}}\right]\ \geq \eta e^T,\quad i=1,\dots,m$$

$$u_r+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{\mathrm{j}}\left[(1-\alpha)E_2^{Y_{rj}}+\ \alpha E_1^{Y_{rj}}\right] - \left[(1-\alpha)E_2^{Y_{io}}+\ \alpha E_1^{Y_{io}}\right]\ \geq \eta\, e^T,\quad r=1,\dots,s$$

$v_i \geq 0$ , i=1,...,m

$u_r \geq 0$ , r=1,...,s

$\lambda_{\mathrm{j}} \geq 0$ , j=1,..,n

$\eta \geq 0$ , w, free

## ٤- مثال عددی

در این قسمت مثال عـددی بـرای توضـیح بیشـتر موضوع آورده می شود. این مثـال شـامل پـنج واحـد تصــمیم‌گیــری اســت کــه دارای دو ورودی و دو خروجی هستند. همچنین، تمامی اعـداد بـه صـورت فازی مثلثی هستند. جدول اعداد فازی برای این مثـال از تحقیـق گـو و تاناکـا[21] (۲۰۰۱) آورده شـده اسـت. جدول(۱) نشانگر اعداد مـورد اسـتفاده در ایـن مثـال است. با استفاده از اعداد ورودی و خروجی پنج مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگـی مکمـل در نــــرم افــــزار لینگــــو حــــل گردیــــده اســــت که نتایج آن در جدول(۲) آورده شده است.

جدول ۱- ورودی‌ها و خروجی های فازی مثلثی

| | واحد تصمیم‌گیرنده ١ | واحد تصمیم‌گیرنده ٢ | واحد تصمیم‌گیرنده ٣ | واحد تصمیم‌گیرنده ٤ | واحد تصمیم‌گیرنده ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ورودی اول | (٤/٥و٤و٣/٥) | (٢/٩و٢و٢/٩) | (٥/٤و٤/٩و٤/٤) | (٤,٨و ٤/١و٣/٤) | (٧/١و٦/٥و٥/٩) |
| ورودی دوم | (٢/٣و٢/١و١/٩) | (١/٦و١/٥و١/٤) | (٣و٢/٦و٢/٢) | (٢/٤و٢/٢و٢/٣) | (٤/٦و٤/١و٣/٦) |
| خروجی اول | (٢/٨و٢/٦و٢/٤) | (٢/٢و٢/٢و٢/٢) | (٣/٧و٣/٢و٢/٧) | (٣/٣و٢/٩و٢/٥) | (٥/٨و٥/١و٤/٤) |
| خروجی دوم | (٤/٤و٤/١و٣/٨) | (٣/٧و٣/٥و٣/٣) | (٥/٩و٥/١و٤/٣) | (٥/٩و٥/٧و٥/٥) | (٨/٣و٧/٤و٦/٥) |

جدول۲- نتایج به دست آمده از حل مدل با کمک نرم افزار لینگو

| | واحد تصمیم‌گیرنده ۱ | واحد تصمیم‌گیرنده ۲ | واحد تصمیم‌گیرنده ۳ | واحد تصمیم‌گیرنده ٤ | واحد تصمیم‌گیرنده ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\theta}$ | ۰/۸٤۲ | ۱ | ۰/۸۳۸ | ۱ | ۱ |
| $\boldsymbol{\eta}$ | ۰/۸۹۷ | ۰/۲۲٥ | ۰/۳۰۲ | ۰/۱٤۸ | ۰/۹۰۱ |
| $\boldsymbol{\lambda_1}$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| $\boldsymbol{\lambda_2}$ | ۰/٦۲۷ | ۱ | ۰/۰٦۹ | ۰ | ۰ |
| $\boldsymbol{\lambda_3}$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| $\boldsymbol{\lambda_4}$ | ۰/۳۷۲ | ۰ | ۰/۹۳ | ۱ | ۰ |
| $\boldsymbol{\lambda_5}$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| $\boldsymbol{v_1}$ | ۰ | ۰/۲۲٥ | ۰/۱۹٦ | ۰/۱٤۸ | ۰/۹۰۱ |
| $\boldsymbol{v_2}$ | ۰/٤٥۸ | ۰/۲۲٥ | ۰ | ۰/۱٤۸ | ۰/۹۰۱ |
| $\boldsymbol{u_1}$ | ۰/۲۸٤ | ۰ | ۰/۲۲٤ | ۰ | ۰ |

همانطور که مشاهده می‌گردد واحد های تصمیم‌گیری ٥و٤و۲ دارای کارایی یک هستند و بقیه واحدهای تصمیم‌گیری ناکارا اعلام شده‌اند. حال برای مقایسه، این مثال با استفاده روش CCR فازی و همین طور BCC فازی با استفاده از نرم افزار لینگو حل گردیده است، که نتایج آن در جدول ۳ آورده شده است. همین‌طور جدول ٤ بیانگر مقایسه‌ای بین کارایی‌های بدست آمده از هر سه روش است. قابل ذکر است مدل‌های فازی فوق با استفاده از روش شرح داده شده در این مقاله غیر فازی شده‌اند.

جدول ۳- نتایج به‌دست آمده از حل مدل‌های CCR فازی و BCC فازی

| | | واحد تصمیم‌گیرنده ۱ | واحد تصمیم‌گیرنده ۲ | واحد تصمیم‌گیرنده ۳ | واحد تصمیم‌گیرنده ٤ | واحد تصمیم‌گیرنده ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CCR فازی | $\theta$ | ۰/۸۲٤ | ۰/۹٥۷ | ۰/۸۳٦ | ۱ | ۰/۹۹٤ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | | ۰/۷٦۷ | ۰/٦۳ | ۰/۹۷٤ | ۱ | ۱/٥٤۱ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| BCC فازی | $\theta$ | ۰/۸٤۲ | ۱ | ۰/۸۳۸ | ۱ | ۱ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | | ۰/٦۲۷ | ۱ | ۰/۰٦۹ | ۰ | ۰ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | | ۰/۳۷۲ | ۰ | ۰/۹۳ | ۱ | ۰ |
| | | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |

جدول٤– مقایسه کارایی های سه مدل ( ترکیبی ، CCR فازی و BCC فازی)

| | واحد تصمیم‌گیرنده ۱ | واحد تصمیم‌گیرنده ۲ | واحد تصمیم‌گیرنده ۳ | واحد تصمیم‌گیرنده ٤ | واحد تصمیم‌گیرنده ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| مدل ترکیبی | ۰/۸٤۲ | ۱ | ۰/۸۳۸ | ۱ | ۱ |
| CCR فازی | ۰/۸۲٤ | ۰/۹۵۷ | ۰/۸۳٦ | ۱ | ۰/۹۹٤ |
| BCC فازی | ۰/۸٤۲ | ۱ | ۰/۸۳۸ | ۱ | ۱ |

با توجه به نتایج به دست آمده این طور می شود برداشت نمود که در این مثال مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی با مدل BCC فازی شرایط همانندی در به دست آوردن کارایی‌ها دارند و همین طور مدل CCR فازی مدلی سختگیرانه تر نسبت به دو مدل دیگر است. همچنین، شایان ذکر است، مدل ترکیبی ارایه شده در مواقعی که واحدهای تصمیم گیرنده، ورودی‌ها و خروجی‌های بیشتری نیاز به بررسی داشته باشند؛ عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های موجود خواهد داشت، به بیان دیگر، این مدل در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده پیچیده و با حجم زیاد به مراتب عملکرد بهتری در مقایسه با دیگر مدل‌های موجود دارد، زیرا در مدل‌هایی مانند BCC و CCR تمامی اطلاعات موجود در مساله استفاده نمی‌شوند و بعضی از ضرایب ممکن است صفر گردند. در حالی که ضرایب این مدل در حالت ترکیبی همگی مثبت هستند و به این علت از تمامی اطلاعات موجود در مساله بهره می برد، که این مورد به عملکرد بهتری در به دست آوردن کارایی‌ها نسبت به مدلهایی همچون BCC وCCR خصوصا در مدلهایی با حجم زیاد، منجر می‌گردد.

## ۵- نتیجه گیری

در این تحقیق ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی در حالت فازی بررسی شد. مدل ترکیبی تحلیل پوششی داده‌ها با شرایط لنگی مکمل قوی مدلی قدرتمند است که می‌توان از این مدل در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاد نمود. در این تحقیق، نخست توضیحاتی در مورد تحلیل پوششی داده‌ها و ارزش این روش در محاسبه کارایی سازمان ها داده شد، سپس به بررسی ترکیب این روش با وضعیت کمبود مکمل قوی پرداخته شد.

به این علت که این روش تا کنون در شرایط عدم قطعیت به کار گرفته نشده است مدلی فازی، پیشنهاد گردید که بتوان از این مدل در حل مسائلی که دارای داده‌های قطعی نیستند بهره برد. به همین منظور، روش غیر فازی سازی در ترکیب با این مدل به کار گرفته شد و مدلی جدید ایجاد گردید تا کاربرد این مدل بیشتر و همچنین، این مدل به شرایط واقعی نزدیک‌تر گردد. همچنین، بعد از مدل پیشنهادی به حل مثالی عددی پرداخته شد تا این که حل این مثال به تشریح و روشن شدن بیشتر موضوع کمک نماید.

در این مثال مقایسه‌ای بین مدل ترکیبی پیشنهادی در این مقاله و دو مدل BCC فازی و CCR فازی انجام گرفت و نتایج آن در مقاله درج گردید.

برای پژوهش‌های آتی می توان از مدل‌های متنوع تحلیل پوششی داده‌ها که تا کنون در ترکیب با سایر مسائل مطرح در آمار و یا تحقیق در عملیات قرار نگرفته اند استفاده نمود، تا با استفاده از مدل‌های متنوعی که می توان از این ترکیب ها به دست آورد به روش‌های مفیدتر و در عین حال کاربردی‌تر برای ارزیابی‌های مختلف دست یافت. به طور نمونه می توان تحلیل پوششی داده‌ها را با برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی همچنین، با استفاده از روندهای اصلاحی موجود در آمار استفاده نمود. همچنین، مدل ارایه شده را می توان با در نظر گرفتن حالت های اعداد احتمالی و بازه‌ای و تئوری خاکستری ترکیب نمود تا با بهره‌گیری از مدل‌های نوین بتوان ارزیابی‌های دقیق‌تری از شرایط واحدهای تصمیم‌گیرنده انجام داد.

## منابع


Chang, P.T., & Lee, J.H.. (2012). "A fuzzy DEA and knapsack formulation integrated model for project selection". *Computers & Operations Research*, 39(1), 112-125.

Charnes, A., Cooper , W.W., Wei , Q.L., & Huang , Z.M. (1989). "Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming", *International Journal of Systems Science*, 7, 1099-1118.

Chen, Y. (2004). "Ranking efficient units in DEA". *Omega*, 32, 213-219.

Cooper, W.W., Deng, H., Hung, Z.M., & Li, S.X. (2002). "chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis". *European journal of the operation research*, 155, 487-501.

Dubois, D., Prade, H. (1987). "The mean value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems*, 24 , 279–300.

Franklin Liu , F.H., & Peng, H.H. (2008). "Ranking of units on the DEA frontier with common weights". *Computers & Operations Research*, 35, 1624-1637.

Guo, P., & Tanaka, H. (2001). "Fuzzy DEA: A perceptual evaluation method". *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1), 149–160.

Heilpern, S. (1992). "The expected value of a fuzzy number". *Fuzzy Sets and Systems*, 47 , 81–86.

Jimenez, M. (1996). "Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 4 (4), 379–388.

Jimenez, M., Arenas, A., & Bilbao, A., Rodriguez, M.V. (2007). "Linear programming with fuzzy parameters: an interactive method resolution", *European Journal of Operational Research*, 177 , 1599–1609.

Parra, M.A., Terol, A.B ., Gladish, B.P., & Rodriguez Uria, M.V. (2005). "Solving a multi objective possibilistic problem through compromise programming", *European Journal of Operational Research* ,164 , 748–759.

Sengupta, J. K. (1992). "A fuzzy systems approach in data envelopment analysis". *Computers and Mathematics with Applications.* 24, 259-266.

Stern , Z.S., Friedman, L. (1998). "DEA and the discriminant analysis of ratios for ranking units". *European Journal of Operational Research*, 111(3), 470-478.

Stern , Z.S., Mehrez, A., & Hadad, Y. (2000). "An AHP/DEA methodology for ranking decision making units". *International Transactions in Operational Research*, 7, 109-124.

Sueyoshi , T. (2001). "Extended DEA-Discriminant analysis". *European Journal of Operational Research*, 131, 324-351.

Sueyoshi , T. (2004). "Mixed integer programming approach of extended DEA–discriminant analysis". *European Journal of Operational Research*, 152, 45-55.

Sueyoshi, T. (2006). "DEA-discriminant analysis: methodological comparison among eight discriminant analysis approaches". *European Journal of Operational Research*, 169, 247–272.

Sueyoshi ,T ., & Sekitani , K. (2007). "Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach". *European Journal of Operational Research*, 176, 1918-1946.

Sueyoshi, T., & Goto, M. (2009). "DEA-DA for bankruptcy-based performance assessment: misclassification analysis of the Japanese construction industry". *European Journal of Operational Research*, 199, 561–575.

Sueyoshi. T., & Sekitani. K. (2009). "An occurrence of multiple projections in DEA-based measurement of technical efficiency: theoretical comparison among DEA models from desirable properties". *European Journal of Operational Research*, 196, 764-794.

Sueyoshi, T., & Goto, M. (2010). "Measurement of a linkage among environmental, operational, and financial performance in Japanese manufacturing firms: a use of Data Envelopment Analysis with strong complementary slackness condition". *European Journal of Operational Research*, 207, 1742-1753.

Sueyoshi, T., & Goto, M. (2012b). "Efficiency-based ranking assessment for electric power industry: a combined use of Data Envelopment Analysis (DEA) and DEADiscriminant Analysis (DA)". *Energy Econ*, 34, 634–644.

Sueyoshi, T., & Goto, M. (2011). "A combined use of DEA (Data Envelopment Analysis) with Strong Complementary Slackness Condition and DEA–DA (Discriminant Analysis)". *Applied Mathematics Letters*, 24, 1051-1056.

Thompson, R.G,. Singleton, F.D., Thrall , R.M., & Smith , B.A. (1986). "Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas", *interfaces*, 16 , 35-49.

Wu, D.D., & Olson , D.L. (2010). "Fuzzy multi attribute grey related analysis using DEA". *Computers & Mathematics with Applications,* 60,166-174.

Yager, R. (1981). "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval", *Information Sciences*, 24 , 143–161.

Zadeh, L.A. (1978). "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility". *Fuzzy sets and systems,* 1, 3-28.

## پی‌نوشت

1 Complementary slackness
2 Data envelopment analysis
3 Sueyoshi
4 Charnes
5 Sueyoshi, Goto
6 Thompson
7 Sueyoshi, Sekitani
8 Strong Complementary Slackness Condition
9 Chen
10 Sengupta
11 Cooper
12 Chang
13 Wu
14 Stern
15 Zadeh
16 Jimenez
17 Yager
18 Dubois, Prade
19 Heilpern
20 Parra
21 Guo, Tanaka