



Production and Operations Management
University of Isfahan E-ISSN: 2423-6950

Vol. 13, Issue 2, No. 29, Summer 2022



<http://dx.doi.org/10.22108/jpom.2022.126335.1315>

(Research Paper)

Modeling a single machine scheduling problem with batch production and the random breakdown and solving it by branch and bound method

Ehsan Molaee

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran, e.molaee@yahoo.com

Ramin Sadeghian*

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran, ramin_sadeghian@yahoo.com

Parviz Fattahi

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Alzahra University, Tehran, Iran, p.fattahi@alzahra.ac.ir

Purpose: Scheduling of batch production and machine disruption are the two main challenges in manufacturing organizations. Due to the complexity of production processes, many industries try to group jobs according to family criteria and use a common setup time to process every family. Also, machine breakdown is an influential factor in the planning of production systems. In this paper, the problem of scheduling a single machine with family setup times and breakdowns is studied. It is assumed that there is a breakdown with an uncertain start time and duration based on the specified probability distribution functions during the planning horizon. The objective function of this problem is the sum of the expected maximum earliness and maximum tardiness.

Design/methodology/approach: For the problem under study, a new mixed integer linear programming model has been developed. Due to the NP-hardness of the problem, a new branch and bound algorithm with the dominance rules and an efficient lower bound is presented for its optimal solving, which uses a new heuristic approach to achieve the upper bound.

Findings: To evaluate the performance of the introduced algorithms, 2520 instances were designed and solved with the presented algorithms. The computational results indicated that 98% of the instances were optimally solved in the specified time limitation by the branch and bound algorithm,

* Corresponding author



and the average percentage of deviation from the optimal solution in the proposed heuristic approach was less than 30%. The results demonstrated the efficiency of the proposed algorithms.

Research limitations/implications: Considering the newness of the problem investigated in this paper, the proposed instances and algorithms can be used as a basis for evaluating other solution methodologies in future research studies. Also, considering other modes of machine failures such as scenario-based failures or re-scheduling the jobs to minimize the deviations of the actual schedule from the planned program, situations with more than one machine such as parallel machines, flow shops, and job shops, other objective functions related to scheduling such as maximum completion time or total completion time, as well as the development of other exact, heuristic or meta-heuristic algorithms are suggested as subjects for future study.

Practical implications: The problem studied in this paper can be attractive and practical for manufacturing organizations. Industries such as automotive, ship and aircraft manufacturing, steel, telecommunication power supply manufacturing, electronic, computer processors, and all industries and systems that somehow deal with the batch production process and unexpected machine breakdowns, can benefit from the results of this research.

Social implications: Because in this study, the starting and finishing times of machine breakdowns were predicted, by applying the results of this research, the production of defective products will be prevented when the machine breaks down, and this leads to the reduction of waste in the environment. Also, according to the objective function defined in the problem investigated in this article, the implication of the results of this research in production environments leads to the reduction of earliness and tardiness costs, which in turn increases the work efficiency of human resources and as a result, increases the job satisfaction.

Originality/value: It seems no study has been conducted on the single machine scheduling problem with batch production, random breakdown, and the objective function of minimizing the sum of the expected maximum earliness and maximum tardiness of the jobs. Particularly, innovations of this paper are threefold: i) a new mixed integer linear programming model was developed for the problem; ii) a novel heuristic approach was proposed to solve the problem, based on hill climbing (PHC); and iii) a new branch and bound algorithm with the dominance rules and an efficient lower bound was presented to solve the problem optimally, which used the PHC heuristic approach to achieve the upper bound.

Keywords: Scheduling, Single machine, Batch Production, Disruption, Earliness, Tardiness



مدیریت تولید و عملیات، دوره ۱۳، شماره ۲، پیاپی ۲۹، تابستان ۱۴۰۱

دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۲۸ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۱۲ ص ۱۲۱-۱۳۶



<http://dx.doi.org/10.22108/jpom.2022.126335.1315>

(مقاله پژوهشی)

مدل‌سازی مسئله زمان‌بندی تک‌ماشین با تولید دسته‌ای و خرابی تصادفی و حل آن به‌وسیله روش شاخه و کران

احسان ملاتی^۱، رامین صادقیان^{۲*}، پرویز فتاحی^۳

۱- دانشجوی دکترا گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، e.molaee@yahoo.com

۲- دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران، ramini_sadeghian@yahoo.com

۳- استادگروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران، p.fattahi@alzahra.ac.ir

چکیده: در این مقاله مسئله زمان‌بندی تک‌ماشین با تولید دسته‌ای و خرابی تصادفی ماشین بررسی می‌شود. در این مسئله هر کار متعلق به یک خانواده کار است و هر خانواده کار زمان آماده‌سازی معلوم و مستقل از توالی دارد. همچنین فرض می‌شود یک خرابی ماشین در طول افق برنامه‌ریزی اتفاق می‌افتد و زمان شروع و طول تصادفی با توزیع احتمال دلخواه و از قبل مشخص دارد. تابع هدف مسئله حداقل‌سازی مجموع حداکثر زودکرد و حداکثر دیرکرد موردانتظار کارهاست. تاکنون در پژوهش‌های گذشته مطالعه‌ای بر این مسئله مشاهده نشده است. برای این مسئله یک مدل جدید برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی مختلط توسعه داده شده است. با توجه به *NP-hard* بودن مسئله برای حل بهینه آن، یک الگوریتم شاخه و کران جدید با اصول غلبه و یک حد پایین کارا ارائه شده است که از یک الگوریتم ابتکاری جدید برای به دست آوردن حد بالا استفاده می‌کند. به‌منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم‌های معرفی شده، تعداد ۲۵۲۰ عدد مسئله نمونه طراحی و با الگوریتم‌های ارائه‌شده، حل شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد ۹۸٪ مسائل نمونه در محدوده زمانی مشخص شده با الگوریتم شاخه و کران به‌صورت بهینه حل شده‌اند و میانگین درصد انحراف از جواب بهینه در الگوریتم ابتکاری ارائه‌شده کمتر از ۳۰٪ است. این موارد کارایی الگوریتم‌های ارائه‌شده را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: زمان‌بندی، تک‌ماشین، تولید دسته‌ای، خرابی، زودکرد، دیرکرد



۱- مقدمه

امروزه در بسیاری از صنایع مدرن تولیدی مانند تولید فولاد، تولید نیمه‌رسانا و صنعت تولید هواپیما، فرآیندهای تولید دسته‌ای به‌طور گسترده‌ای درخور توجه قرار گرفته است (چنگ^۱ و همکاران، ۲۰۱۷). همچنین خرابی غیرمنتظره ماشین‌آلات یک چالش مهم در سیستم‌های تولیدی و پردازنده‌های رایانه‌ای است. در بسیاری از سیستم‌های تولیدی و خدماتی، به دلایلی نظیر خرابی ماشین‌آلات، نوسانات و خرابی‌های برق، کمبود مواد اولیه، نیروی انسانی و ابزارآلات و غیره، دوره‌های عدم دسترسی با شروع و مدت زمان تصادفی اتفاق می‌افتد (شونگ^۲ و همکاران، ۲۰۱۷). از سوی دیگر براساس نظام تولید بهنگام، هم زدکرد و هم دیرکرد کارها در محیط‌های تولیدی هزینه‌بر است. دیرکرد کارها به هزینه‌های کمبود منجر می‌شود و زدکرد کارها نیز باعث بروز هزینه‌های موجودی می‌شود.

در این مقاله مسئله زمان‌بندی تک‌ماشین با تولید دسته‌ای، خرابی تصادفی و تابع هدف مجموع حداکثر زدکرد و دیرکرد بررسی می‌شود. در این مسئله کارها براساس مشابهت با یکدیگر به خانواده‌هایی تقسیم‌بندی می‌شوند و کارهای متعلق به یک خانواده به آماده‌سازی نیاز ندارند؛ اما اگر پس از تکمیل کاری از یک خانواده خاص، کاری از خانواده دیگری بخواهد پردازش یابد، آماده‌سازی ضرورت می‌یابد. فرض می‌شود یک خرابی در طول افق برنامه‌ریزی وجود دارد و زمان شروع و مدت زمان آن متغیرهای تصادفی با توزیع‌های احتمال مشخص و دلخواه است. در این مسئله هر کار، زمان پردازش و موعد تحویل معلوم دارد و کلیه کارها از سرگرفتنی است؛ یعنی اگر هنگام پردازش، یک کار بر ماشین خرابی اتفاق بیفتد، پس از اتمام خرابی کل عملیات پردازش آن کار مجدداً انجام می‌شود. هدف زمان‌بندی کارها به‌گونه‌ای است که مجموع قابل‌انتظار حداکثر زدکرد و حداکثر دیرکرد کارها حداقل شود. تاکنون هیچ‌گونه مطالعه‌ای بر این مسئله مشاهده نشده است.

تاکنون مطالعات بسیاری بر مسائل زمان‌بندی با پردازش دسته‌ای انجام شده است. برخی از پژوهشگران مسائل زمان‌بندی تک‌ماشین را با دسته‌بندی سری کارها و انواع معیارهای منظم بررسی کرده‌اند (پی^۳ و همکاران، ۲۰۱۷؛ الف و ب؛ فن^۴ و همکاران، ۲۰۱۷؛ پی و همکاران، ۲۰۱۹). برخی دیگر مسائل زمان‌بندی تک‌ماشین را با دسته‌بندی موازی کارها، با فرضیات مختلف تجزیه و تحلیل کرده‌اند (چنگ و همکاران، ۲۰۱۷؛ تانگ^۵ و همکاران، ۲۰۱۷؛ مونچ^۶ و روب^۷، ۲۰۱۷؛ لی^۸ و همکاران، ۲۰۱۹؛ کونگ^۹ و همکاران، ۲۰۲۰؛ امده^{۱۰} و همکاران، ۲۰۲۰؛ هاشمی و کاشان، ۲۰۲۰) و برخی دیگر مسائل زمان‌بندی تک‌ماشین را با زمان‌های آماده‌سازی خانواده کار بررسی کرده‌اند (هیندر^{۱۱} و میسون^{۱۲}، ۲۰۱۷؛ عبدالله^{۱۳} و چنگ^{۱۴}، ۲۰۱۷). برای هریک از مسائل معیارهای منظمی بررسی شده و براساس فرضیات داده‌شده الگوریتم‌های دقیق (مدل‌سازی ریاضی، برنامه‌ریزی پویا، شاخه و کران)، الگوریتم‌های ابتکاری و یا فراابتکاری ارائه شده است.

برخی از پژوهشگران مسائل زمان‌بندی را در شرایط خرابی بررسی کرده و با استفاده از روش‌های دقیق، ابتکاری یا فراابتکاری آنها را حل کرده‌اند (شونگ و همکاران، ۲۰۱۷؛ هاله و همکاران، ۲۰۱۷؛ امیرخانی و همکاران، ۲۰۱۷). شن^{۱۵} و ژو^{۱۶} (۲۰۱۸) برای مسئله تک‌ماشین با نت دوره‌ای، زمان‌های پردازش و تعمیر غیرقطعی و تابع هدف حداکثر زمان تکمیل الگوریتم‌های ابتکاری را ارائه دادند. دتی^{۱۷} و همکاران (۲۰۱۹) برای مسئله تک‌ماشین با نت

انعطاف‌پذیر و توابع هدف، حداکثر زمان تکمیل و زمان تکمیل کل یک مدل استوار و رویه‌های ابتکاری را برای حل آن توسعه دادند.

تاکنون بر مسائل زمان‌بندی با پردازش دسته‌ای و محدودیت دسترسی، مطالعات کمی مشاهده شده است. پی و همکاران (۲۰۱۷ ج) برای مسئله تک‌ماشین دسته‌ای سریالی با یک محدودیت دسترسی، زمان‌های پردازش وابسته به موقعیت، زمان‌های آماده‌سازی وابسته به زمان و تابع هدف حداکثر زمان تکمیل، یک الگوریتم دقیق ارائه کردند. لو^{۱۸} و همکاران (۲۰۱۸) برای مسئله زمان‌بندی ماشین‌های موازی غیرمرتبط دسته‌ای، با کارها و فعالیت‌های نت زوال‌یافتنی و تابع هدف حداکثر زمان تکمیل، یک الگوریتم فراابتکاری ترکیبی را ارائه دادند.

همان‌گونه که بررسی پژوهش‌های گذشته نشان می‌دهد، تاکنون مطالعه‌ای بر مسائل زمان‌بندی تک‌ماشین با تولید دسته‌ای، خرابی تصادفی و تابع هدف مجموع حداکثر زودکرد و دیرکرد مشاهده نشده است. در این مقاله برای این مسئله، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی جدید ارائه شده است. همچنین با توجه به سخت بودن مسئله، یک الگوریتم شاخه و کران جدید برای حل بهینه آن طراحی شده است که حد بالای آن با یک الگوریتم ابتکاری جدید مبتنی بر تپه‌نوردی به دست می‌آید.

ترتیب بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم، مسئله و ویژگی‌های آن تعریف می‌شود؛ در بخش سوم یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مسئله ارائه و همچنین یک الگوریتم حل بهینه شاخه و کران برای مسئله تعریف می‌شود؛ در بخش چهارم نتایج محاسباتی ارائه می‌شود؛ در بخش پنجم نتایج به دست آمده تجزیه و تحلیل می‌شود و در بخش ششم، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

۲- مبانی نظری پژوهش

مسئله عبارت است از زمان‌بندی F خانواده کار بر یک ماشین، به طوری که هر خانواده f ($1 \leq f \leq F$) دارای n_f کار و $\sum_{f=1}^F n_f = n$ است. هر کار $j_{i,f}$ زمان پردازش معلوم $p_{i,f}$ و موعد تحویل معلوم $d_{i,f}$ دارد. هر خانواده f یک آماده‌سازی با زمان معلوم s_f دارد. اگر در یک توالی، کار $j_{i,f}$ اولین کار توالی باشد یا کار قبل از $j_{i,f}$ عضو خانواده f نباشد یا کار $j_{i,f}$ اولین کار بعد از اتمام خرابی باشد، آنگاه آماده‌سازی s_f ضرورت می‌یابد. کلیه کارها از سر گرفتنی‌اند؛ یعنی اگر هنگام وقوع خرابی پردازش کاری ناتمام بماند، بعد از اتمام خرابی، پردازش آن کار مجدداً شروع می‌شود. شروع و طول دوره خرابی به ترتیب با دو متغیر تصادفی B_1 و D نشان داده و فرض می‌شود براساس اطلاعات گذشته، توزیع احتمال این دو متغیر تصادفی از قبل معلوم است. همچنین فرض می‌شود زمان شروع و طول دوره خرابی می‌توانند هر توزیع احتمال دلخواهی داشته باشند. با الهام از گورن^{۱۹} و سبوکیوقلو^{۲۰} (۲۰۰۹)، تابع هدف استوار مجموع موردانتظار حداکثر زودکرد و حداکثر دیرکرد برای این مسئله در نظر گرفته شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[E_{max} + T_{max}] = E[E_{max}] + E[T_{max}] \quad (1)$$

که در آن $E[E_{max}]$ و $E[T_{max}]$ مقادیر موردانتظار حداکثر زودکرد و حداکثر دیرکردند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[E_{max}] = E[\max_{1 \leq i \leq n} \{ \max\{0, d_i - C_i\} \}] = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max\{0, d_i - E[C_i]\} \} \quad (۲)$$

$$E[T_{max}] = E[\max_{1 \leq i \leq n} \{ \max\{0, C_i - d_i\} \}] = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \max\{0, E[C_i] - d_i\} \} \quad (۳)$$

در این روابط، G_i نشان‌دهنده زمان تکمیل کار i ($1 \leq i \leq n$) در توالی است و با توجه به تصادفی بودن زمان شروع و طول خرابی، مقدار آن نیز تصادفی است. این مسئله به صورت $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ نشان داده می‌شود. در این مسئله با توجه به هزینه‌های بالای بیکار نگه داشتن عمده ماشین، فرض می‌شود بیکاری عمده مجاز نیست. مسئله بررسی شده کاملاً جدید است و تاکنون در پژوهش‌های گذشته مطالعه‌ای بر آن مشاهده نشده است.

با توجه به اینکه مسئله تک‌ماشین با یک دوره عدم دسترسی و تابع هدف حداکثر مغایرت $(1|h_1|L_{max})$ ، NP-hard است (لی^{۲۱}، ۱۹۹۶)، همچنین مسئله تک‌ماشین با خانواده آماده‌سازی و تابع هدف حداکثر مغایرت $(1|s_f|L_{max})$ نیز NP-hard است (برونو^{۲۲} و دونی^{۲۳}، ۱۹۷۸)، بنابراین می‌توان گفت مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ به شدت NP-hard است.

۳- روش‌شناسی پژوهش

با توجه به جدید بودن مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ ، کلیه روش‌های حل ارائه شده برای این مسئله در این مقاله نیز کاملاً جدید و نوآورانه است. در این بخش رویکردهای حل این مسئله بررسی می‌شود. در ابتدا با توجه به مبانی نظری و مفروضات مطرح شده در بخش دوم، مدل ریاضی مسئله توسعه داده می‌شود، سپس برای حل بهینه مسئله در ابعاد گسترده‌تر، یک الگوریتم بهینه شاخه و کران و یک الگوریتم ابتکاری ارائه می‌شود.

۳-۱- مدل ریاضی مسئله

به منظور توسعه مدل برنامه ریاضی مسئله، مقدار متغیر تصمیم X_{ifk} ، یک تعریف می‌شود اگر کار $j_{i,f}$ در موقعیت k ($1 \leq k \leq n$) توالی پردازش یابد و در غیر این صورت مقدار آن صفر تعریف می‌شود. همچنین اگر کار زمان بندی شده در موقعیت k ام توالی به آماده‌سازی s_f نیاز داشته باشد، مقدار متغیر تصمیم Y_{fk} یک تعریف و در غیر این صورت صفر تعریف می‌شود. در نهایت اگر کار زمان بندی شده در موقعیت k ام قبل از شروع خرابی موردانتظار زمان بندی شود، مقدار متغیر تصمیم H_k برابر صفر تعریف می‌شود و اگر کار مربوط بعد از پایان خرابی پیش‌بینی شده زمان بندی شود، مقدار این متغیر یک تعریف می‌شود. مدل برنامه‌ریزی ریاضی مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ به صورت زیر است:

$$\min E[E_{max}] + E[T_{max}] \quad (۴)$$

s. t.

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{f=1}^F X_{ifk} = 1 \quad (۵)$$

$$f = 1, 2, \dots, F, \quad i = 1, 2, \dots, n_f, \quad \sum_{k=1}^n X_{ifk} = 1 \quad (۶)$$

$$f = 1, 2, \dots, F, \quad \sum_{i=1}^{n_f} X_{if1} = Y_{f1} \quad (۷)$$

$$f = 1, 2, \dots, F, \quad k = 2, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n_f} X_{ifk} + \sum_{i=1}^{n_q} \sum_{q=1}^F X_{iq(k-1)} - Y_{fk} \leq 1 \quad (۸)$$

$q \neq i$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad E[C_k] = E[C_{k-1}] + \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{f=1}^F p_{if} X_{ijk} + \sum_{f=1}^F s_f Y_{fk} \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad E[C_k] = E[B_1] + E[D_1] + \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{f=1}^F (p_{if} + s_f) X_{ijk} - M(1 - H_k) \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad E[C_{k-1}] \leq E[B_1] + M(1 - H_k) \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad E[B_1] - E[C_{k-1}] \leq \sum_{f=1}^F s_f Y_{fk} + \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{f=1}^F p_{if} X_{ifk} + M(1 - H_k) - 1 \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^n H_k = 1 \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{f=1}^F d_{if} X_{ifk} - E[C_k] \leq E[E_{max}] \quad (14)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad E[C_k] - \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{f=1}^F d_{if} X_{ifk} \leq E[T_{max}] \quad (15)$$

$$C_0 = 0 \quad (16)$$

$$H_0 = 0 \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad , \quad f = 1, 2, \dots, F \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n_f \quad , \quad X_{ifk}, Y_{fk}, H_k \in \{0, 1\} \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad \quad E[C_k] \geq 0 \quad (19)$$

$$E[E_{max}], E[T_{max}] \geq 0 \quad (20)$$

با توجه به جدید بودن ماهیت مسئله بررسی شده و در نظر گرفتن هم‌زمان مفروضات تولید دسته‌ای و خرابی تصادفی در آن، مدل ارائه‌شده برای مسئله مدنظر نیز جدید است. در این مدل روابط (۱۰) تا (۱۳) محدودیت‌های جدیدی‌اند که خاص مسئله بررسی‌شده‌اند و دیگر روابط توسعه‌یافته، برخی روابط ارائه‌شده در پژوهش‌های قبلی‌اند. در ادامه روابط ارائه‌شده در این مدل تشریح می‌شود.

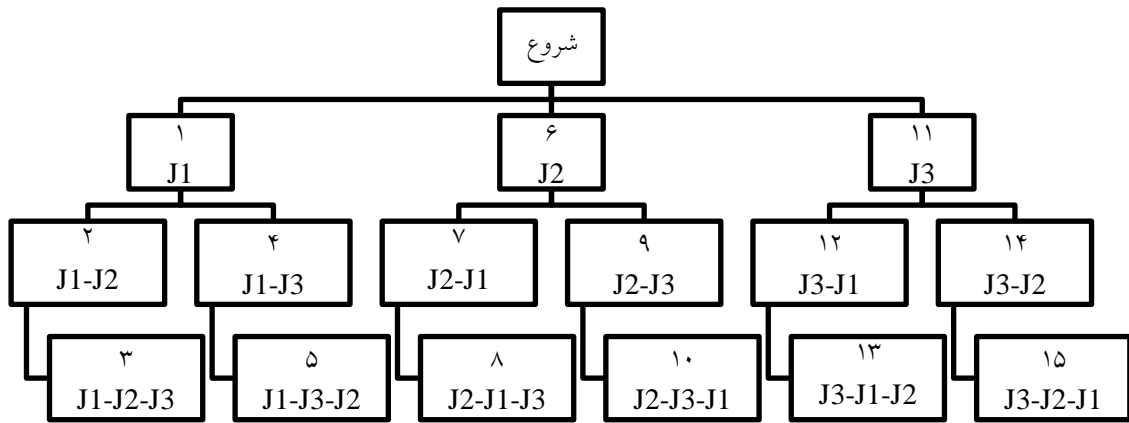
رابطه (۴) نشان‌دهنده تابع هدف استوار مسئله است که به دنبال حداقل کردن حداکثر مجموع زودکرد و دیرکرد موردانتظار است. روابط (۵) تا (۸) توسعه‌یافته محدودیت‌های مدل ارائه‌شده توسط گوپتا^{۲۴} و چانتر اواریپان^{۲۵} (۲۰۰۸) برای زمان‌بندی با خانواده آماده‌سازی‌اند. محدودیت‌های (۵) و (۶) بیان می‌کنند که هر موقعیت تنها می‌تواند توسط یک کار اشغال شود و هر کار تنها می‌تواند یک‌بار پردازش یابد. محدودیت (۷) برای کار در اولین موقعیت توالی، زمان آماده‌سازی خانواده کار را در نظر می‌گیرد. محدودیت (۸) برای کارهایی که قبل از آنها کاری از یک خانواده متفاوت است، زمان آماده‌سازی خانواده کار را در نظر می‌گیرد. محدودیت (۹) توسعه‌یافته محدودیت مربوط به محاسبه زمان تکمیل در مدل ارائه‌شده توسط دتی و همکاران (۲۰۱۹) است و زمان تکمیل موردانتظار کلیه کارها به جز اولین کار، بعد از زمان پایان موردانتظار خرابی را محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۰) زمان تکمیل اولین کار بعد از پایان موردانتظار خرابی را محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۱) تضمین می‌کند زمان تکمیل کارهایی که قبل از زمان شروع موردانتظار خرابی برنامه‌ریزی می‌شوند، نباید از زمان شروع موردانتظار خرابی بزرگ‌تر باشد. محدودیت (۱۲) وجودنداشتن بیکاری عمدی را قبل از شروع خرابی موردانتظار بررسی می‌کند.

محدودیت (۱۳) تضمین می‌کند که فقط یک خرابی در طول افق برنامه‌ریزی اتفاق می‌افتد. محدودیت‌های (۱۴) و (۱۵) مقادیر حداکثر زودکرد و حداکثر دیرکرد موردانتظار کارها را محاسبه می‌کنند. محدودیت‌های (۱۶) تا (۲۰) مقادیر مرزی موردنیاز، نوع و علامت متغیرهای تصمیم مسئله را توصیف می‌کنند.

با توجه به متغیرهای صفر و یک X_{ifk} ، Y_{fk} و H_k ، مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی مختلط^{۲۶} (MILP) است. برای صحت‌سنجی نهایی، این مدل با استفاده از نرم‌افزار گمز بر مسائل نمونه با ابعاد کوچک آزمایش و نتایج حل آن در مقایسه با نتایج شمارش کامل، تأیید شد. با توجه به سخت‌بودن مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ و ناکارآمد بودن فرآیند مدل‌سازی ریاضی، ضرورت استفاده از روش‌های دیگر در حل این مسئله احساس می‌شود. برای محاسبه زمان تکمیل موردانتظار کارها، باید از مقادیر قطعی زمان‌های پردازش و آماده‌سازی و مقادیر موردانتظار شروع و طول خرابی، یعنی به ترتیب مقادیر $E[B_1]$ و $E[D]$ استفاده شود.

۳-۲- روش شاخه و کران

در این بخش یک الگوریتم شاخه و کران^{۲۷} (BB) جدید برای حل بهینه مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ ارائه می‌شود. در این الگوریتم کارها از ابتدای توالی چیده می‌شوند و در هر توالی جزئی، هر یک از کارهای باقی‌مانده به عنوان شاخه جدید به انتهای توالی افزوده می‌شود. ترتیب ورود کارها به درخت جست‌وجو براساس ترتیب غیرنزولی موعدهای تحویل^{۲۸} (EDD) است و استراتژی جست‌وجو به صورت اولین عمق^{۲۹} است. در شکل ۱ فرآیند شاخه‌زنی الگوریتم BB برای یک مسئله با چهار کار نشان داده شده است. در این شکل گره‌ها به ترتیب پیمایش درخت جست‌وجو شماره‌گذاری شده‌اند. در ادامه، فرآیند اجرای الگوریتم شاخه و کران و نحوه قطع شاخه‌ها تشریح می‌شود.



شکل ۱- فرآیند شاخه‌زنی در الگوریتم BB

Fig 1- Branching process in the BB algorithm

قبل از شروع الگوریتم BB، یک حد بالا برای مسئله محاسبه و در هر شاخه، مقدار حد پایین توالی جزئی متناظر با آن شاخه محاسبه می‌شود. اگر در شاخه‌ای مقدار حد پایین بزرگ‌تر یا مساوی حد بالا بود، آن شاخه قطع می‌شود. همچنین در صورت رسیدن به یک توالی پذیرفتنی کامل، مقدار تابع هدف موردانتظار این توالی با حد بالای جاری مقایسه و در صورت نیاز، حد بالا به‌روزرسانی می‌شود. در ادامه حدود بالا و پایین و برخی اصول غلبه برای الگوریتم BB ارائه می‌شود.

۳-۲-۱- حد بالا

در این مقاله از یک الگوریتم ابتکاری جدید به نام تعویض جفتی مبتنی بر تپه‌نوردی^{۳۰} (PHC) به‌منظور به دست آوردن حد بالای رویه BB برای مسئله $E[E_{max} + T_{max}] | s_f, breakdown$ استفاده می‌شود. این الگوریتم دارای دو فاز ساخت و بهبود است. در فاز ساخت براساس یک ویژگی مسئله، یک توالی اولیه ایجاد می‌شود و در فاز بهبود، براساس یک رویکرد حریصانه، توالی ایجادشده بهبود می‌یابد.

در مرحله ساخت توالی اولیه، کارهای با موعد تحویل کوچک‌تر در ابتدای توالی و براساس ترتیب EDD مرتب می‌شوند. این کار باعث کاهش میزان دیرکرد کارهای دیرکردار می‌شود. همچنین کارهای با موعد تحویل بزرگ‌تر در انتهای توالی و براساس ترتیب غیرنزولی زمان‌های شناوری^{۳۱} (MST) مرتب می‌شوند که زمان شناوری کار $J_{i,f}$ به‌صورت $d_{i,f} - p_{i,f}$ تعریف می‌شود؛ این کار نیز باعث کاهش میزان زودکرد کارهای زودکردار می‌شود. در مرحله بهبود توالی اولیه، با استفاده از یک رویه تعویض جفتی براساس الگوریتم تپه‌نوردی با تیزترین شیب، در جهت بهبود مقدار تابع هدف تلاش می‌شود. با توجه به اینکه رویه تپه‌نوردی یک رویکرد حریصانه است، در مرحله بهبود ضمن تلاش در جهت کاهش مقدار موردانتظار تابع هدف، ساختار کلی توالی اولیه حفظ می‌شود. گام‌های الگوریتم PHC به‌صورت زیر است:

الگوریتم PHC:

شروع

فاز ایجاد:

توالی current را به‌صورت زیر ایجاد کنید:

میانگین مواعدهای تحویل کارها را محاسبه کنید و آن را d_{ave} بنامید؛کارهای با موعد تحویل کوچک‌تر مساوی d_{ave} را در ابتدای توالی و براساس ترتیب EDD بچینید؛کارهای با موعد تحویل بزرگ‌تر از d_{ave} را در انتهای توالی و براساس ترتیب MST بچینید.

فاز بهبود:

قرار دهید $\Delta = M$ (M یک مقدار بزرگ است)؛تا زمانی که $\Delta > 0$ تکرار کنید؛قرار دهید $\Delta = 0$ ؛به‌ازای $i = 1$ تا $i = n-1$ تکرار کنید؛به‌ازای $j = i+1$ تا $j = n$ تکرار کنید؛در توالی current دو کار i و j را جابه‌جا کنید و توالی حاصل را next بنامید؛اگر $\Delta > E[E_{max}(current) + T_{max}(current)] - E[E_{max}(next) + T_{max}(next)]$ ، آنگاه:

$$\Delta \leftarrow E[E_{max}(current) + T_{max}(current)] - E[E_{max}(next) + T_{max}(next)]$$

$$best_next \leftarrow next$$

پایان اگر

پایان تکرار

پایان تکرار

اگر $\Delta > 0$ آنگاه $current \leftarrow best_nest$

پایان تکرار

توالی $current$ را به عنوان جواب نهایی در نظر بگیرید.

پایان

۳-۲-۲- حد پایین

در هر شاخه از درخت BB، توالی جزئی σ نشان‌دهنده توالی کارهای زمان‌بندی شده و مجموعه σ' نشان‌دهنده مجموعه کارهای زمان‌بندی نشده در این شاخه است. توالی $\sigma'_{MST_es_a}$ نشان‌دهنده ترتیب MST کارهای برنامه‌ریزی نشده است که زمان آماده‌سازی خانواده کار برای هر یک از آنها در نظر گرفته شده است. همچنین اگر زمان تکمیل موردانتظار آخرین کار توالی σ کوچک‌تر مساوی $E(B_1)$ باشد، کارهای توالی $\sigma'_{MST_es_a}$ بلافاصله بعد از زمان پایان موردانتظار خرابی چیده می‌شود؛ در غیر این صورت، کارهای این توالی بلافاصله بعد از توالی σ چیده می‌شوند. در نهایت هنگام چیدن کارها براساس ترتیب MST، برای محاسبه مقادیر شناوری، زمان آماده‌سازی خانواده هر کار به زمان پردازش آن اضافه می‌شود.

توالی $\sigma'_{EDD_fs_p}$ ترتیب EDD کارهای باقی مانده با فرض انقطاع کار تعریف می‌شود. در این توالی فقط برای اولین کار مربوط به هر یک از این خانواده‌ها که در توالی ظاهر می‌شود، زمان آماده‌سازی در نظر گرفته می‌شود. ذکر این نکته مهم است که اگر آخرین کار توالی σ کار $j_{k,h}$ (که $k \in \{1, 2, \dots, n_h\}$ و $h \in \{1, 2, \dots, F\}$) باشد، در صورتی که در مجموعه کارهای زمان‌بندی نشده کاری عضو خانواده h وجود داشته باشد، در ترتیب $\sigma'_{EDD_fs_p}$ برای هیچ‌یک از کارهای عضو خانواده h زمان آماده‌سازی در نظر گرفته نمی‌شود. قضیه زیر نحوه محاسبه حد پایین در هر شاخه از درخت BB را بیان می‌کند.

قضیه ۱: در مسئله $1|s_f, breakdown|E[E_{max} + T_{max}]$ حد پایین توالی جزئی σ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$LB(\sigma) = \max\{E[E_{max}(\sigma)], E[E_{max}(\sigma'_{MST_es_a})]\} + \max\{E[T_{max}(\sigma)], E[T_{max}(\sigma'_{EDD_fs_p})]\} \quad (21)$$

اثبات: اگر تابع هدف E_{max} موردانتظار به تنهایی در نظر گرفته شود، واضح است با افزایش زمان‌های تکمیل موردانتظار، مقدار موردانتظار این معیار افزایش نمی‌یابد. همچنین اگر در مجموعه σ' هر کار یک دسته مجزا در نظر گرفته شود که زمان آماده‌سازی خانواده کار مربوط به خود را دارد، بیشترین حالت زمان تکمیل موردانتظار برای کارها در نظر گرفته شده است و ترتیب MST برای این کارها با لحاظ کردن زمان آماده‌سازی خانواده هر کار در زمان پردازش کار، معیار E_{max} را برای آنها کمینه می‌کند.

از سوی دیگر اگر تنها معیار T_{max} موردانتظار در نظر گرفته شود، با کاهش زمان‌های تکمیل موردانتظار کارها، مقدار موردانتظار تابع هدف افزایش نمی‌یابد. حال با توجه به اینکه آخرین کار توالی σ عضو خانواده h است، با چیدن هر یک از کارهای عضو مجموعه σ' که عضو خانواده h نباشند، حداقل یک‌بار زمان آماده‌سازی مربوط به

خانواده کار آنها باید در نظر گرفته شود؛ بنابراین در نظر گرفتن زمان آماده‌سازی برای اولین کاری که در ترتیب EDD کارهای زمان‌بندی نشده ظاهر می‌شود، معیار T_{max} را برای آنها حداقل می‌کند.

۳-۲-۳- اصول غلبه

در این زیربخش دو اصل غلبه بیان می‌شود که می‌توانند فضای جست‌وجوی الگوریتم BB را کاهش دهند. در هر شاخه از الگوریتم BB، دو اصل غلبه ۱ و ۲ به ترتیب اجرا و به قطع برخی از شاخه‌ها منجر می‌شوند. زمان تکمیل موردانتظار توالی جزئی σ با $E[C(\sigma)]$ نشان داده می‌شود و بیان‌کننده زمان تکمیل موردانتظار آخرین کار در توالی جزئی σ است. اگر در فرآیند BB ابتدا کار $J_{i,k}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n_k\}$ و $k \in \{1, 2, \dots, F\}$) و سپس کار $J_{j,k}$ به انتهای توالی جزئی σ اضافه شوند، توالی حاصل به صورت $\sigma i_k j_k$ نشان داده می‌شود. همچنین عبارت $E[C'(\sigma)]$ به این صورت تعریف می‌شود: اگر بعد از اتمام توالی σ خرابی موردانتظار ماشین شروع شود، یعنی کارهای $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ اولین کارهایی باشند که بعد از پایان خرابی موردانتظار ماشین پردازش می‌یابند یا اگر آخرین کار توالی σ عضو خانواده k نباشد، آنگاه $E[C'(\sigma)] = E[C(\sigma)] + s_k$ است. اما اگر آخرین کار توالی σ عضو خانواده k باشد و کارهای $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ اولین کارهای زمان‌بندی شده بعد از دسترسی مجدد ماشین نباشند، آنگاه $E[C'(\sigma)] = E[C(\sigma)]$ است.

لم ۱: اگر کارهای $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ در صورت اضافه شدن به انتهای توالی جزئی σ ، هر دو قبل از شروع خرابی موردانتظار ماشین و یا هر دو بعد از پایان خرابی موردانتظار ماشین پردازش یابند و روابط زیر برقرار باشد:

$$\min\{d_{i,k}, d_{j,k}\} \geq E[C'(\sigma)] + p_{i,k} + p_{j,k} \quad (22)$$

$$d_{j,k} - p_{j,k} \leq d_{i,k} - p_{i,k} \quad (23)$$

آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$E[E_{max}(\sigma j_k i_k) + T_{max}(\sigma j_k i_k)] \leq E[E_{max}(\sigma i_k j_k) + T_{max}(\sigma i_k j_k)] \quad (24)$$

اثبات: با توجه به رابطه (۲۲) انتظار داریم هر دو کار $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ در توالی‌های $\sigma j_k i_k$ و $\sigma i_k j_k$ زودتر درآید شوند، در نتیجه مقدار حداکثر دیرکرد موردانتظار این دو کار برابر صفر می‌شود و در مقدار T_{max} موردانتظار توالی‌های جزئی مربوط اثرگذار نخواهند بود. از سوی دیگر با توجه به اینکه ترتیب MST معیار E_{max} را حداقل می‌کند، با توجه به رابطه (۲۳) چون در توالی $\sigma j_k i_k$ دو کار $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ براساس ترتیب MST مرتب شده‌اند، مقدار حداکثر زودکرد موردانتظار مربوط به این دو کار در توالی $\sigma j_k i_k$ از مقدار حداکثر زودکرد موردانتظار آنها در $\sigma i_k j_k$ بیشتر نیست.

نتیجه ۱ (اصل غلبه ۱): با توجه به لم ۱، اگر در فرآیند جست‌وجوی BB در شاخه $\sigma i_k j_k$ شرایط لم ۱ برقرار باشد، می‌توان این شاخه را قطع کرد.

لم ۲: اگر کارهای $J_{j,k}$ و $J_{i,k}$ در صورت اضافه شدن به انتهای توالی جزئی σ ، هر دو قبل از شروع خرابی موردانتظار ماشین و یا هر دو بعد از پایان خرابی موردانتظار ماشین پردازش یابند و روابط زیر برقرار باشد:

$$\max\{d_{i,k}, d_{j,k}\} \leq E[C(\sigma)] \quad (25)$$

$$d_{j,k} \leq d_{i,k} \quad (26)$$

آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$E[E_{\max}(\sigma j_k i_k) + T_{\max}(\sigma j_k i_k)] \leq E[E_{\max}(\sigma i_k j_k) + T_{\max}(\sigma i_k j_k)] \quad (27)$$

اثبات: با توجه به رابطه (۲۵) انتظار داریم هر دو کار $j_{j,k}$ و $j_{i,k}$ در توالی های $\sigma j_k i_k$ و $\sigma i_k j_k$ دیرکردار شوند، در نتیجه مقدار حداکثر زودکرد موردانتظار این دو کار برابر صفر می شود و در مقدار E_{\max} موردانتظار توالی های جزئی مربوط اثرگذار نخواهند بود. از سوی دیگر با توجه به اینکه ترتیب EDD معیار T_{\max} را حداقل می کند، با توجه به رابطه (۲۶) چون در توالی $\sigma j_k i_k$ دو کار $j_{j,k}$ و $j_{i,k}$ براساس ترتیب EDD مرتب شده اند، مقدار حداکثر دیرکرد موردانتظار مربوط به این دو کار در توالی $\sigma j_k i_k$ از مقدار حداکثر دیرکرد موردانتظار آنها در $\sigma i_k j_k$ بیشتر نیست.

نتیجه ۲ (اصل غلبه ۲): با توجه به لم ۲، اگر در فرآیند جست و جوی BB در شاخه $\sigma i_k j_k$ شرایط لم ۲ برقرار باشد، می توان این شاخه را قطع کرد.

۴- مطالعه کاربردی

به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم های ارائه شده، مجموعه گسترده ای از مسائل نمونه طراحی و با الگوریتم های ارائه شده حل شده اند. براساس نظر اسکالر^{۳۲} (۲۰۰۷) برای طراحی مسائل نمونه، تعداد خانواده های کار و تعداد کارهای هر خانواده از مجموعه های $F = 3$ و $n_f = 3$ و $F = 4$ و $n_f = 4$ و $F = 3$ و $n_f = 6$ و $F = 6$ و $n_f = 3$ و $F = 4$ و $n_f = 5$ و $F = 5$ و $n_f = 5$ و همچنین در بازه $[1,10]$ ایجاد شده اند. همچنین زمان های آماده سازی هر خانواده کار تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[1,10]$ ایجاد شده اند. موعدهای تحویل نیز به طور تصادفی از دو توزیع یکنواخت گسسته در بازه های $[1,20]$ و $[1,10]$ ایجاد شده اند. موعدهای تحویل نیز به طور تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[TP(1 - r - \frac{R}{2}), TP(1 - r + \frac{R}{2})]$ ایجاد شده اند. در این روابط، $TP = \sum_{f=1}^F (\sum_{i=1}^{n_f} p_{i,f} + s_f)$ ، R نشان دهنده پارامتر موعد تحویل و r عامل دیرکرد تعریف می شود. برای پارامترهای (r, R) ، سه زوج مقداری $(0.5, 0.5)$ ، $(0.5, 1)$ و $(0.25, 1)$ در نظر گرفته شده است. براساس اودونوان^{۳۳} و همکاران (۱۹۹۹)، فرض می شود زمان شروع خرابی دارای توزیع نمایی با میانگین $\theta(\bar{p} + \bar{s}_f)$ است که در آن $\bar{s}_f = \frac{\sum_{f=1}^F s_f}{F}$ و $\bar{p} = \frac{\sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^{n_f} p_{i,f}}{n}$ است. پارامتر θ می تواند یکی از مقادیر ۱۰، ۵ و ۳ را داشته باشد. همچنین فرض می شود طول خرابی دارای توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[\beta_1(\bar{p} + \bar{s}_f), \beta_2(\bar{p} + \bar{s}_f)]$ است. مقادیر (β_1, β_2) از زوج مقادیر $(0.1, 0.5)$ و $(1, 2)$ انتخاب می شوند.

براساس هر ترکیب از مقادیر مختلف پارامترها، سری های S_{ijkl} برای مسائل نمونه تولید شده تعریف می شود که در آنها i ($1 \leq i \leq 2$) نشان دهنده نوع خانواده آماده سازی کارها، j ($1 \leq j \leq 3$) نشان دهنده نوع موعد تحویل کارها، k ($1 \leq k \leq 3$) نشان دهنده نوع زمان شروع خرابی و l ($1 \leq l \leq 2$) مشخص کننده نوع طول دوره خرابی

است. در جدول ۱ مقادیر اندیس‌های سری‌های S_{ijkl} تعریف شده است. به‌ازای هر ترکیب F و n_f ، در هر سری ۱۰ مسئله نمونه تولید شده است. به این ترتیب تعداد کل مسائل نمونه تولیدی ۲۵۲۰ عدد است.

جدول ۱- اندیس‌های سری S_{ijkl} Table 1- Series S_{ijkl} indices

اندیس	i	j	k	l
مقدار ۱	$s_f \in [1,20]$	$(r, R) = (0.5, 0.5)$	$\theta = 10$	$(\beta_1, \beta_2) = (0.1, 0.5)$
مقدار ۲	$s_f \in [1,10]$	$(r, R) = (0.5, 1)$	$\theta = 5$	$(\beta_1, \beta_2) = (1, 2)$
مقدار ۳	--	$(r, R) = (0.25, 1)$	$\theta = 3$	--

برای حل هریک از مسائل توسط الگوریتم BB محدودیت زمانی ۴۰۰۰ ثانیه لحاظ شده است و نمونه‌هایی که الگوریتم BB در محدوده زمانی مدنظر قادر به حل آنها نبوده است، به‌عنوان مسائل حل‌نشده توسط BB در نظر گرفته می‌شوند. به‌منظور ارزیابی الگوریتم PHC از شاخص درصد انحراف Dev به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$Dev = \frac{f(\pi) - f(\pi^*)}{f(\pi^*)} * 100 \quad (28)$$

در این رابطه $f(\pi)$ نشان‌دهنده مقدار تابع هدف توالی به‌دست‌آمده از اجرای الگوریتم PHC بر نمونه بررسی شده و $f(\pi^*)$ نشان‌دهنده مقدار تابع هدف جواب بهینه نمونه بررسی شده است.

۴-۱- یافته‌ها

الگوریتم‌های PHC و BB در زبان برنامه‌نویسی VC++ کدنویسی شدند و توسط یک پردازنده با مشخصات Intel CORE i7 2.7 GHz CPU 8 GB RAM بر مسائل نمونه اجرا شدند. در جدول ۲ نتایج حل مسائل نمونه توسط الگوریتم‌های داده‌شده آمده است. در این جدول ستون «تعداد BB» نشان‌دهنده تعداد نمونه‌هایی است که در محدوده زمانی مشخص شده توسط الگوریتم BB به‌صورت بهینه حل شده‌اند. شایان ذکر است که تعداد کل مسائل نمونه در هر سری ۷۰ عدد است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد الگوریتم BB توانسته است کلیه مسائل نمونه تا سقف ۲۵ کار را در محدوده زمانی مشخص شده به‌صورت بهینه حل کند و مسائل حل‌نشده تنها مربوط به نمونه‌های با تعداد ۳۰ کار است.

ستون «زمان حل BB» در جدول ۲ نشان‌دهنده میانگین زمان‌های حل مسائل نمونه توسط الگوریتم BB برحسب ثانیه است. به‌دلیل ناچیز بودن زمان‌های حل مسائل توسط الگوریتم PHC، مقادیر مربوط به آن در این جداول ذکر نشده است. ستون‌های «درصد قطع شده» در جدول ۲ نیز میانگین درصد گره‌های قطع شده را به‌ترتیب توسط حد پایین، اصل غلبه ۱ و اصل غلبه ۲ نسبت به کل گره‌های طی شده در هر نمونه، در الگوریتم شاخه و کران نشان می‌دهد. ستون «انحراف PHC» در جدول ۲ نشان‌دهنده میانگین درصد انحراف از جواب بهینه در الگوریتم ابتکاری PHC در هر نمونه است.

جدول ۲- نتایج حل مسئله $1|s_f, brkdown|E[E_{max} + T_{max}]$ Table 2- Result for the problem $1|S_f, brkdown|E[E_{max}+T_{max}]$

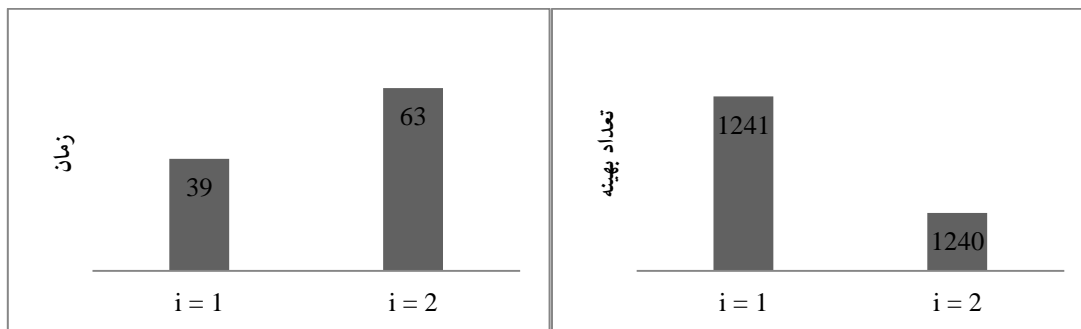
سری	تعداد	زمان	درصد قطع شده			انحراف	سری	تعداد	زمان	درصد قطع شده			انحراف
			LB	D1	D2					PHC	LB	D1	
S ₁₁₁₁	۶۶	۱۲۲/۴۷	۸۲/۹۳	۰/۰۱	۳/۹۸	۲۱/۷۵	S ₂₁₁₁	۶۷	۱۷۰/۱۵	۸۳/۴۸	۰/۰۲	۳/۱۱	۱۵/۲۳
S ₁₁₁₂	۶۶	۶۰/۹۰	۸۲/۹۵	۰/۰۲	۴/۰۹	۲۰/۰۸	S ₂₁₁₂	۶۵	۱۲۵/۸۹	۸۳/۴۹	۰/۰۲	۳/۲۳	۱۳/۲۲
S ₁₁₂₁	۶۷	۱۲۴/۲۱	۸۳/۹۲	۰/۰۱	۳/۶۸	۲۲/۳۰	S ₂₁₂₁	۶۷	۱۹۵/۴۵	۸۳/۰۵	۰/۰۲	۳/۲۶	۱۴/۸۸
S ₁₁₂₂	۶۵	۹۳/۲۰	۸۳/۷۷	۰/۰۱	۴/۱۷	۲۰/۵۹	S ₂₁₂₂	۶۶	۱۴۸/۵۹	۸۲/۷۳	۰/۰۲	۳/۷۱	۱۵/۷۹
S ₁₁₃₁	۶۷	۱۰۹/۲۱	۸۳/۵۶	۰/۰۱	۳/۸۲	۱۹/۸۵	S ₂₁₃₁	۶۸	۲۳۵/۴۵	۸۴/۳۶	۰/۰۱	۳/۱۱	۱۵/۲۱
S ₁₁₃₂	۷۰	۱۳۵/۰۴	۸۳/۹۳	۰/۰۱	۳/۷۷	۱۷/۸۴	S ₂₁₃₂	۶۷	۱۹۸/۱۸	۸۳/۸۹	۰/۰۱	۴/۰۰	۱۳/۰۳
S ₁₂₁₁	۷۰	۲/۶۳	۸۷/۶۴	۰/۰۱	۱/۶۱	۱۶/۳۴	S ₂₂₁₁	۷۰	۳/۰۰	۸۹/۱۰	۰/۰۱	۱/۱۷	۱۱/۶۶
S ₁₂₁₂	۷۰	۴/۰۳	۸۷/۵۷	۰/۰۱	۱/۹۱	۱۵/۱۴	S ₂₂₁₂	۷۰	۵/۷۷	۸۹/۱۵	۰/۰۱	۱/۲۹	۱۱/۸۱
S ₁₂₂₁	۷۰	۱/۴۲	۸۸/۰۵	۰/۰۱	۱/۶۲	۱۴/۴۱	S ₂₂₂₁	۷۰	۱/۵۵	۸۸/۱۸	۰/۰۱	۱/۰۹	۱۰/۸۹
S ₁₂₂₂	۷۰	۲/۰۲	۸۷/۶۷	۰/۰۱	۱/۹۹	۱۴/۵۴	S ₂₂₂₂	۷۰	۱/۴۴	۸۸/۵۶	۰/۰۱	۱/۳۱	۱۰/۱۳
S ₁₂₃₁	۷۰	۰/۹۰	۸۷/۷۵	۰/۰۱	۱/۶۳	۱۴/۷۹	S ₂₂₃₁	۷۰	۲/۰۳	۸۸/۹۸	۰/۰۱	۱/۱۵	۹/۵۱
S ₁₂₃₂	۷۰	۲/۰۷	۸۷/۵۶	۰/۰۱	۲/۰۳	۱۵/۵۲	S ₂₂₃₂	۷۰	۵/۱۸	۸۸/۶۴	۰/۰۱	۱/۴۵	۹/۹۰
S ₁₃₁₁	۷۰	۲/۰۱	۸۷/۷۲	۰/۰۱	۱/۱۴	۱۵/۸۵	S ₂₃₁₁	۷۰	۱/۶۶	۸۹/۶۲	۰/۰۱	۰/۷۰	۹/۴۷
S ₁₃₁₂	۷۰	۳/۳۶	۸۷/۳۷	۰/۰۱	۱/۳۵	۱۵/۱۰	S ₂₃₁₂	۷۰	۲/۷۱	۸۸/۹۲	۰/۰۱	۰/۹۲	۹/۴۷
S ₁₃₂₁	۷۰	۹/۴۷	۸۷/۳۸	۰/۰۱	۱/۲۹	۱۶/۰۷	S ₂₃₂₁	۷۰	۱/۶۱	۸۸/۵۳	۰/۰۱	۰/۷۷	۹/۹۵
S ₁₃₂₂	۷۰	۲/۲۰	۸۷/۰۸	۰/۰۱	۱/۴۶	۱۷/۵۴	S ₂₃₂₂	۷۰	۱/۳۰	۸۸/۲۷	۰/۰۱	۰/۹۰	۱۰/۱۱
S ₁₃₃₁	۷۰	۹/۴۴	۸۷/۶۱	۰/۰۱	۱/۳۲	۱۶/۷۵	S ₂₃₃₁	۷۰	۳/۹۴	۸۹/۶۳	۰/۰۱	۰/۶۹	۹/۷۵
S ₁₃₃₂	۷۰	۹/۶۹	۸۷/۱۵	۰/۰۱	۱/۵۲	۱۶/۸۴	S ₂₃₃₂	۷۰	۲۶/۷۷	۸۸/۹۰	۰/۰۱	۰/۷۵	۱۲/۱۷

۵- بحث

از بررسی جدول ۲ مشاهده می‌شود که سخت‌ترین مسائل از نظر متوسط زمان حل BB و تعداد نمونه بهینه حل شده توسط BB مربوط به سری‌های با $1 = z$ است. این امر می‌تواند به این دلیل باشد که در این سری‌ها بازه موعدهای تحویل کوچک‌تر است و در نتیجه پراکندگی موعدهای تحویل کارها کمتر است. این خاصیت باعث می‌شود که در توالی‌های مختلف مقادیر دیرکرد و زودکرد کارها نزدیک به یکدیگر شود و بنابراین برای پیدا کردن جواب بهینه، لازم است که فضای بیشتری از درخت جست‌وجو پیمایش شود.

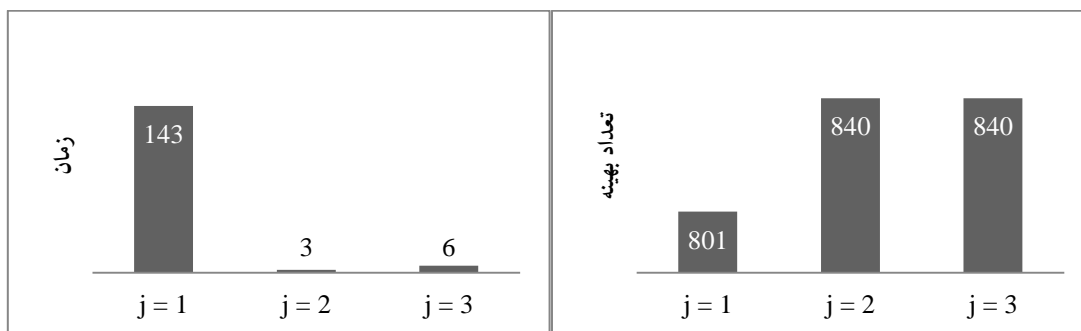
همچنین ساده‌ترین مسائل مربوط به سری‌های با $2 = z$ است. این امر می‌تواند به این دلیل باشد که در این سری‌ها، علاوه بر پراکندگی بیشتر موعدهای تحویل، تأثیر بیشتر عامل دیرکرد به دیرکردارشدن کارها منجر می‌شود و بنابراین با تأثیرگذارتر بودن یکی از معیارهای تابع هدف، مسائل ساده‌تر حل می‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد با کاهش زمان آماده‌سازی خانواده کارها، مسائل کمی سخت‌تر می‌شود. ممکن است این خاصیت به این دلیل باشد که با کاهش زمان‌های آماده‌سازی خانواده کارها، احتمال دارد که با افزایش تعداد دسته‌های کاری تابع هدف موردانتظار مسئله بهبود یابد و این امر به پیچیده‌تر شدن فرآیند حل مسائل منجر می‌شود. همچنین افزایش یا کاهش زمان شروع و طول موردانتظار دوره خرابی، تأثیر معناداری را بر پیچیدگی محاسباتی مسائل نمونه نشان نمی‌دهد و این امر استوار بودن رویه‌های حل ارائه شده را نسبت به مقادیر مختلف زمان شروع و طول خرابی نشان می‌دهد.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد حد پایین رویه BB کارآیی بالایی را در قطع گره‌های پیموده‌شده داشته است و در بیشتر مسائل نمونه به قطع بیش از ۸۰ درصد گره‌های پیموده‌شده منجر شده است. همچنین در سری‌های مسائل، اصل غلبه ۲ نسبت به اصل غلبه ۱ عملکرد مناسب‌تری در قطع گره‌های طی‌شده در درخت BB داشته است. همچنین میانگین درصد انحراف الگوریتم ابتکاری PHC نسبت به جواب بهینه، در بیشتر مجموعه داده‌ها کمتر از ۳۰ درصد بوده است. در شکل‌های ۲ تا ۵، نمودار مقایسه‌ای میانگین زمان حل و تعداد مسائل بهینه حل‌شده توسط الگوریتم BB به تفکیک هریک از اندیس‌های i ، j ، k و l در سری S_{ijkl} نشان داده شده است.



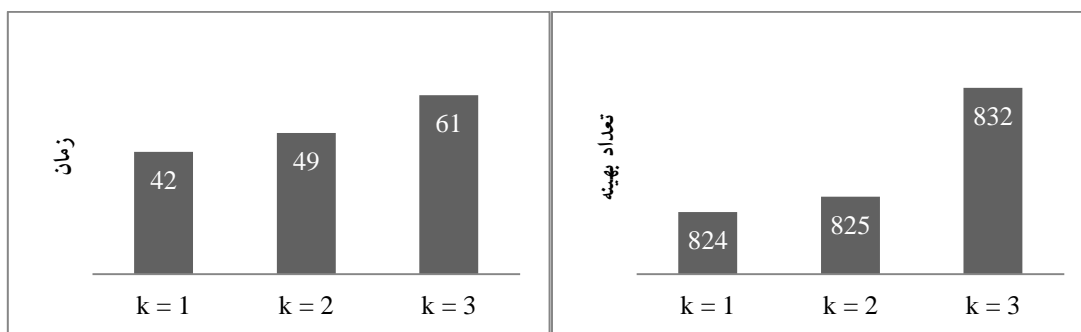
شکل ۲- نمودار میانگین زمان و تعداد نمونه حل‌شده توسط BB به‌ازای مقادیر مختلف i

Fig 2- Average number and average computation time diagrams of instances solved by BB for values i



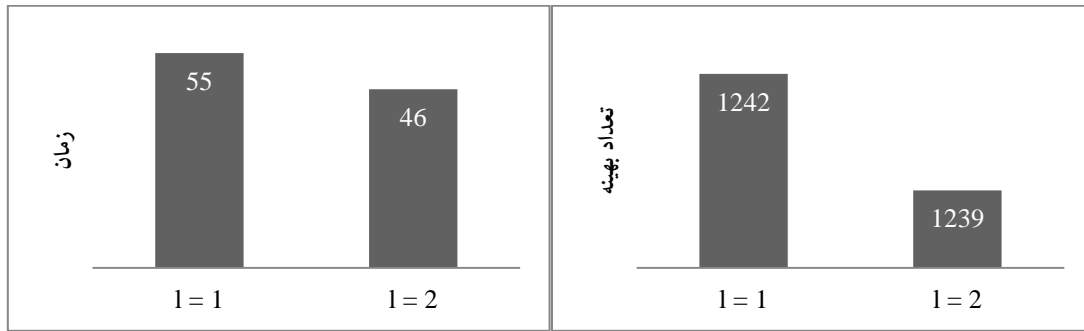
شکل ۳- نمودار میانگین زمان و تعداد نمونه حل‌شده توسط BB به‌ازای مقادیر مختلف j

Fig 3- Average number and average computation time diagrams of instances solved by BB for values j



شکل ۴- نمودار میانگین زمان و تعداد نمونه حل‌شده توسط BB به‌ازای مقادیر مختلف k

Fig 4- Average number and average computation time diagrams of instances solved by BB for values k



شکل ۵- نمودار میانگین زمان و تعداد نمونه حل شده توسط BB به ازای مقادیر مختلف l

Fig 5- Average number and average computation time diagrams of instances solved by BB for values l

۶- نتیجه گیری

در این مقاله با توجه به نیاز صنایع تولیدی، مسئله زمان بندی تک ماشین با زمان های آماده سازی خانواده کارها، خرابی تصادفی و تابع هدف مجموع حداکثر زودکرد و حداکثر دیرکرد مورد انتظار بررسی شد. تاکنون مطالعه ای بر این مسئله مشاهده نشده است. برای مسئله بررسی شده در این مقاله، یک مدل برنامه ریزی ریاضی توسعه داده و نشان داده شد به دلیل سخت بودن مسئله، مدل مربوطه در حل مسائل با ابعاد متوسط و بزرگ کارایی مناسبی ندارد. به همین دلیل برای حل بهینه مسئله مدنظر، یک الگوریتم حل بهینه BB توسعه داده شد که اصول غلبه و یک حد پایین کارا دارد و از جواب به دست آمده از یک الگوریتم ابتکاری جدید به نام PHC به عنوان حد بالا استفاده می کند. به منظور ارزیابی الگوریتم های حل ارائه شده، مجموعه گسترده ای از مسائل نمونه شامل ۳۶ سری داده طراحی و با الگوریتم های معرفی شده حل شدند. نتایج حل مسائل نمونه نشان داد در نمونه های با اندازه کوچک و متوسط، الگوریتم BB قادر به حل ۹۸٪ مسائل نمونه در محدوده زمانی مدنظر شده و حد پایین آن توانسته است در بیشتر مسائل نمونه بیش از ۸۰ درصد گره های پیموده شده را در درخت BB قطع کند. همچنین در بیشتر نمونه های حل شده به ازای هر زوج تعداد خانواده و تعداد کارهای هر خانواده، میانگین درصد انحراف از جواب بهینه الگوریتم PHC کمتر از ۳۰٪ بوده است.

با توجه به اینکه مسئله بررسی شده در این مقاله کاملاً جدید است، در پژوهش های بعدی بر این مسئله، مسائل نمونه و الگوریتم های دقیق و ابتکاری ارائه شده در این مقاله می تواند مبنایی برای ارزیابی دیگر روش های حل ارائه شده برای این مسئله در نظر گرفته شود. برای انجام پژوهش های آتی، در نظر گرفتن دیگر حالت های مواجهه با خرابی ماشین مانند خرابی های مبتنی بر سناریو یا زمان بندی مجدد کارها با هدف حداقل سازی انحرافات برنامه واقعی از برنامه زمان بندی شده، حالت های با بیش از یک ماشین مانند ماشین های موازی، فلوشاپ و سیستم کارگاهی، دیگر توابع هدف مربوط به زمان بندی مانند حداکثر زمان تکمیل یا زمان تکمیل کل، همچنین توسعه دیگر الگوریتم های دقیق، ابتکاری یا فراابتکاری پیشنهاد می شود.

References

- Abdallah, K.S., Jang, J. (2017). Scheduling a single machine with job family setup times to minimize total tardiness. *IEEE International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC), Funchal, Portugal*, 665-672. 10.1109/ICE.2017.8279948

- Amirkhani, F., Amiri, A., Sahraeian, R. (2017). A New Method Based on Simulation-Optimization Approach to Find Optimal Solution in Dynamic Job-shop Scheduling Problem with Breakdown and Rework. *Journal of Production and Operations Management*, 7th year, Vol. 13, 157-174.
- Bruno, J., Downey, P. (1978). Complexity of task sequencing with deadlines, set-up times and changeover costs. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 7, Iss. 4. <https://doi.org/10.1137/0207031>
- Cheng, B.Y., Leung, J. Y.T., Li, k. (2017). Integrated scheduling on a batch machine to minimize production, inventory and distribution costs. *European Journal of Operational Research*, 258(1), 104-112. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.09.009>
- Deti, P., Nicosia, G., Pacifici, A., Manrique, G.Z. (2019). Robust single machine scheduling with a flexible maintenance activity. *Computers and Operations Research*, 107, 19-31. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.03.001>
- Emde, S., Polten, L., Gendreau, M. (2020). Logic-based benders decomposition for scheduling a batching machine. *Computers & Operations Research*, 113, 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.104777>
- Fan, W., Pei, J., Liu, X., Pardalos, P.M., Kong, M. (2017). Serial-batching group scheduling with release times and the combined effects of deterioration and truncated job-dependent learning. *Journal of Global Optimization*, 71, 147–163. <https://doi.org/10.1007/s10898-017-0536-7>
- Goren, S., Sabuncuoglu, I. (2009). Optimization of schedule robustness and stability under random machine breakdowns and processing time variability. *IIE Transactions*, 42(3), 203-220. <https://doi.org/10.1080/07408170903171035>
- Gupta, J. N.d., Chantaravaran, S. (2008). Single machine group scheduling with family setups to minimize total tardiness. *International Journal of Production Research*, Volume 46, Issue 6, 1707-1722. [10.1080/00207540601009976](https://doi.org/10.1080/00207540601009976)
- Haleh, H., Maghsoudlou, H., Hadipour, H., Nabovati, H. (2017). Scheduling single machine with random breakdown and preemptive jobs. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 34(4), 1-11. <https://doi.org/10.1080/21681015.2017.1292961>
- Hashemi, S.N., Kashan, A.H. (2020). A branch and bound algorithm equipped with tighter lower bound values for makespan minimization on a batch processing machine. *Production and Operations Management*, Vol. 10, Issue 2, No. 19, 181-201.
- Hinder, O., Mason, A. G. (2017). A novel integer programming formulation for scheduling with family setup times on a single machine to minimize maximum lateness. *European Journal of Operational Research*, 262(2), 411-423. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.03.003>
- Kong, M., Liu, X., Pei, J., Zhou, Z., Pardalos, P.M. (2020). Parallel-batching scheduling of deteriorating jobs with non-identical sizes and rejection on a single machine. *Optimization Letters*, 14, 857–871. <https://doi.org/10.1007/s11590-019-01389-x>
- Lee, C.Y. (1996). Machine scheduling with an availability constraint. *J Glob Optim*, 9, 395–416. <https://doi.org/10.1007/BF00121681>
- Li, X., Li, Y., Huang, Y. (2019). Heuristics and lower bound for minimizing maximum lateness on a batch processing machine with incompatible job families. *Computers and Operations Research*, (106), 91–101. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.02.012>
- Lu, S., Liu, X., Pei, J., My T.T., My, M., Pardalos, P. (2018). A hybrid ABC-TS algorithm for the unrelated parallel-batching machines scheduling problem with deteriorating jobs and maintenance activity. *Applied Soft Computing*, 66, 168-182. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.02.018>
- Mönch, L., Roob, S. (2017). A matheuristic framework for batch machine scheduling problems with incompatible job families and regular sum objective. *Applied Soft Computing*, 68, 835-846. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.028>
- O'Donovan, R., Uzsoy, R., McKay, K. N. (1999). Predictable scheduling of a single machine with breakdowns and sensitive jobs. *International Journal of Production Research*, 37(18), 4217-4233. <https://doi.org/10.1080/002075499189745>

- Pei, J., Cheng, B., X Liu, X., Pardalos, P.M., Kong, M. (2019). Single-machine and parallel-machine serial-batching scheduling problems with position-based learning effect and linear setup time. *Annals of Operations Research*, 272, 217–241. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2481-8>
- Pei, J., Liu, X., Pardalos, P.M., Fan, W., Yang, S. (2017a). Scheduling deteriorating jobs on a single serial-batching machine with multiple job types and sequence-dependent setup times. *Annals of Operations Research*, 249, 175–195. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1824-6>
- Pei, J., Liu, X., Pardalos, P.M., Li, K., Fan, W., Migdalas, A. (2017c). Single-machine serial-batching scheduling with a machine availability constraint, position-dependent processing time, and time-dependent set-up time. *Optimization Letters*, 11, 1257–1271. <https://doi.org/10.1007/s11590-016-1074-9>
- Pei, J., Liu, X., Pardalos, P.M., Migdalas, A., Yang, S. (2017b). Serial-batching scheduling with time-dependent setup time and effects of deterioration and learning on a single-machine. *Journal of Global Optimization*, 67, 251–262. [10.1007/s10898-015-0320-5](https://doi.org/10.1007/s10898-015-0320-5)
- Schaller, J. (2007). Scheduling on a single machine with family setups to minimize total tardiness. *International Journal of Production Economics*, 105(2), 329-344. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2004.10.020>
- Shen, J., Zhu, K. (2018). An uncertain single machine scheduling problem with periodic maintenance. *Knowledge-Based Systems*, 144, 32-41. <https://doi.org/10.1016/j.knsys.2017.12.021>
- Tang, L., Zhao, X., Liu, J., Leung, J.Y.T (2017). Competitive two-agent scheduling with deteriorating jobs on a single parallel-batching machine. *European Journal of Operational Research*, 63(2), 401-411. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.05.019>
- Xiong, X., Wang, D., Cheng, T.C. E., Wu, C., Yi, Y. (2017). Single-machine scheduling and common due date assignment with potential machine disruption. *International Journal of Production Research*, 56(3), 1345-1360. <https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1346317>

¹ Cheng

² Xiong

³ Pei

⁴ Fan

⁵ Tang

⁶ Mönch

⁷ Roob

⁸ Li

⁹ Kong

¹⁰ Emde

¹¹ Hinder

¹² Mason

¹³ Abdallah

¹⁴ Jang

¹⁵ Shen

¹⁶ Zhu

¹⁷ Detti

¹⁸ Lu

¹⁹ Goren

²⁰ Sabuncuoglu

²¹ Lee

²² Bruno

²³ Downey

²⁴ Gupta

²⁵ Chantaravarapan

²⁶ Mixed Integer Linear Programming

²⁷ Branch and Bound

²⁸ Earliest Due Date

²⁹ Back Tracking

³⁰ Pairwise Hill Climbing

³¹ Minimum Slack Time

³² Schaller

³³ O'Donovan